МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Прокофьев А.А.

Задачи с параметрами

Москва 2004

ББК 22.14
П78
УДК 51(075.4)

Рецензенты:

Кожухов И.Б. – доктор физико-математических наук;
Фадеичева Т.П. – учитель математики школы №853 г. Зеленограда

Прокофьев А.А.

П78 Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004. – 258 стр.

Цель данного пособия состоит в том, чтобы познакомить школьников с основными типами задач с параметрами. В пособии содержится большой класс задач, с которыми выпускникам, возможно, придется столкнуться на школьных выпускных или на вступительных экзаменах в вуз. Приведена некоторая классификация задач, и показано, что существуют стандартные приемы и методы, а также определенный набор опорных задач, на которых базируются или к которым сводятся многие разнообразные задачи.

Книга адресована учителям и учащимся выпускных и профильных классов.

«*Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но, если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным, и, если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы*» (Д. Пойа. Как решать задачу.)

Предисловие

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики. При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решений и не приобрести лишних. Это требует от школьника более развитого логического мышления и математической культуры, но, в свою очередь, эти задачи сами способствуют их развитию. Опыт вступительных экзаменов показывает, что учащиеся, владеющие методами их решения, обычно успешно справляются и с другими задачами.

Теоретическое изучение физических процессов, решение экономических задач часто приводит к различным уравнениям или неравенствам, содержащим параметры, и необходимой частью их решения является исследование характера процесса в зависимости от значений параметров. Таким образом, задачи с параметрами представляют собой небольшие исследовательские задачи. Однако часто оказывается, что выпускник школы либо вообще не имеет представления о решении задач с параметром, либо теряется даже в случае самого простого вида подобных задач, когда единственным усложняющим моментом является ветвление решения и, соответственно, ветвление ответа.

Цель данного пособия состоит в том, чтобы познакомить школьников с основными типами задач с параметрами (уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, задачи, связанные с исследованием квадратного трехчлена, коэффициенты которого зависят от параметра, геометрические задачи, задачи на определение наибольшего и наименьшего значения функции, и т. д.). И, может быть, познакомить с новыми, незнакомыми для него методами решений уравнений, неравенств и т.д. Выпускнику школы полезно владеть различными методами решения подобных задач – аналитическими и графическими, уметь переводить словесное условие задачи в аналитическую форму – сводить ее к решению уравнений, неравенств и систем и совокупностей уравнений и неравенств.

К сожалению, в программах по математике для неспециализированных школ задачам с параметром практически не отводится места, а, например, в учебнике для учащихся школ и классов с углубленным изучением курса математики («Алгебра и математический анализ для 10 и 11 классов», Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд) им отведено место только в 11-м классе. Между тем, задачи с параметрами можно и нужно использовать уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств. Это могут быть задачи нахождения решений в общем виде, определения корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследования количества корней в зависимости от значений параметра. Так сделано в «Сборнике задач по алгебре для 8-9 классов», 1994 г. (авторы: М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич). Важно, чтобы школьники уже на первых простых примерах усвоили: во-первых, необходимость аккуратного обращения с параметром – фиксированным, но неизвестным числом, поняли, что оно имеет двойственную природу (с одной стороны, это некоторое число, с другой стороны, степень свободы общения с ним ограничивается его неизвестностью); во-вторых, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра.

Методически было бы правильно каждый пройденный тип уравнений (неравенств) завершать задачами с использованием параметра. Во-первых, школьнику трудно привыкнуть к параметру за два-три занятия – нужно время; во-вторых, использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, оно способствует развитию его математической и логической культуры, а также развитию интереса к математике, поскольку открывает перед ним новые методы и возможности для самостоятельного поиска.

Структура пособия такова: оно разбито на главы, а главы на параграфы, каждый из которых представляет отдельную тему, к которой даны методические указания, представлено решение типовых примеров и подобраны задачи для самостоятельного решения.

Автор выражает благодарность учащимся выпускных 11 «А» классов 2002-2004 гг. школы №853 г. Зеленограда, в работе с которыми было апробировано данное пособие.

Желаю успеха!   Автор

ГЛАВА I. Вводная часть

§ 1.1. Основные понятия и определения

Пусть дано уравнение или неравенство с двумя переменными:

$$F(x,a)=0 \ \ (G(x,a)\geq 0 \ \text{или} \ G(x,a)>0). \qquad (1.1)$$

Задача о решении уравнения (неравенства) (1.1) может быть сформулирована одним из двух следующих способов.

1. Найти все пары чисел (x,a), удовлетворяющие этому уравнению (неравенству). В этом случае выражение (1.1) называется ***уравнением (неравенством) с двумя переменными*** x ***и*** a, в котором обе переменные x и a играют одинаковую роль.

2. Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение (неравенство) относительно x. Тогда выражение (1.1) ***называют уравнением (неравенством) с переменной*** x ***и параметром*** a***,*** а множество A – ***областью изменения параметра*** a. При отсутствии ограничений под областью изменения параметра подразумевается множество всех действительных чисел.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое конкретное числовое значение, то возможен один из случаев:

а) получится уравнение или неравенство с одной неизвестной x;

б) получится выражение, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется ***допустимым***, во втором – ***недопустимым***. Решить уравнение или неравенство с параметром – это значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех удовлетворяющих уравнению или неравенству значений неизвестного. Обратите внимание на то, что выражение (1.1) – это, по существу, краткая запись семейства уравнений (неравенств), получающихся из него при заданных значениях параметра a. Поэтому ***решить уравнение (неравенство)*** (1.1) **(*с переменной*** x ***и параметром*** a **) *– это значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений (неравенств), получаемых из*** (1.1) ***при всех допустимых значениях параметра*** a **.**

Отметим, что при некоторых множествах из допустимых значений параметра a могут получаться одни семейства уравнений (неравенств), при иных – другие. Поэтому для облегчения решения удобно нанести на числовую прямую значения параметра, называемые ***контрольными***, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Например, уравнение (неравенство) из квадратного (квадратичного) становится линейным.

При решении уравнения (неравенства) (1.1) можно пользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм решения уравнения или неравенства с параметром

1. Определяют ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a, вытекающие из того, что функции и арифметические операции в $F(x,a)$ или $G(x,a)$ имеют смысл.

2. Определяют формальные решения (1.1), записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают контрольные значения параметра, то их наносят на числовую ось Oa. Эти значения разбивают область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из подмножеств решают заданное уравнение.

3. Исключают те значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям.

4. На числовую ось Oa добавляют значения параметра, найденные в п.3. Для каждого из промежутков на оси Oa записывают все полученные решения в зависимости от значений параметра a. (В случае достаточно простых уравнений п.4 можно опустить).

5. Выписывают ответ, т.е. записывают решения в зависимости от значений параметра a.

Замечание. 1) Наличие параметра в задаче предполагает специальную форму записи ответа, позволяющую установить, каков ответ для любого допустимого значения параметра. Недопустимые значения также указываются в ответе, и считается, что при этих значениях параметра задача не имеет решения. При записи ответа обычно значения параметра перечисляются в порядке возрастания от $-\infty$ до $+\infty$, но иногда для компактности ответа объединяют промежутки для параметра, на которых формулы решения совпадают.

2) В случае ветвления решения удобно использовать числовую прямую Oa, на которую наносятся контрольные значения параметра, а на промежутках, на которые эти значения разбили прямую, указываются ответы задачи. Данный прием позволяет в дальнейшем не потерять най-

денные ответы и четко указать значения параметра, которым они соответствуют.

Продемонстрируем сказанное выше на примере.

Пример 1. *Решить неравенство* $a(a-2)x > 2-a$.

Решение. Контрольные значения параметра получаются из условия $a(a-2)=0$, так как при $a(a-2)=0$ неравенство не содержит переменной x .

Нанесем на числовую ось Oa контрольные значения. Они разбивают ось Oa на промежутки (см. рис. 1):

1) $a<0$; 2) $0<a<2$; 3) $a>2$.

На каждом из этих промежутков решим данное неравенство. Значения $a=0$ и $a=2$ требуют отдельного рассмотрения.

Если $a<0$, то $a(a-2)>0$. Разделив обе части неравенства на множитель $a(a-2)\neq 0$, получим $x>-1/a$.

Если $2>a>0$, то $a(a-2)<0$ и, следовательно, $x<-1/a$.

Если $a>2$, то $a(a-2)>0$ и $x>-1/a$.

При $a=0$ получаем неравенство $0\cdot x>2$, не имеющее решений.

При $a=2$ получаем $0\cdot x>0$, т.е. решений также нет.

Нанесем получаемые в ходе решения ответы на соответствующие промежутки числовой оси Oa и запишем ответ.

Замечание. Промежуток, к которому относится соответствующее решение, помечается на рисунке дугой. На ее конце ставится стрелочка в том случае, если это решение не относится к крайней точке промежутка.

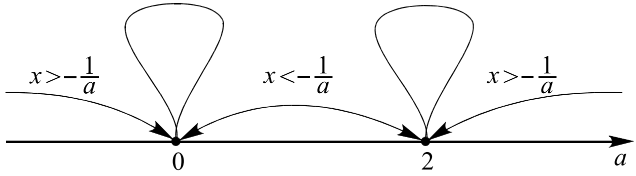


Рис. 1

Ответ. Если $a<0$, то $x>-1/a$; если $0<a<2$, то $x<-1/a$; если $a>2$, то $x>-1/a$; если $a=0$ и $a=2$, то решений нет.

Аналитический и графический методы сравнения выражений, зависящих от параметра

При решении уравнений (неравенств) с параметрами часто приходится сравнивать несколько выражений зависящих от параметра, находить среди них наибольшее или наименьшее. Обычно применяют аналитический метод, т.е. составляют и решают систему неравенств. В случае двух выражений достаточно решить одно неравенство. Если же выражений больше, то лучше использовать графический метод.

Пример 2. *Сравнить числа* a^2 и $3a+4$.

Решение. Найдем значения параметра a, при которых число a^2 больше числа $3a+4$. Для этого решим неравенство $a^2 > 3a+4$ или $a^2 - 3a - 4 > 0$. Его решение есть $a \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$. При $a=-1$ и $a=4$ справедливо равенство $a^2 = 3a+4$, т.е. числа равны. Соответственно, при $a \in (-1;4)$ число a^2 меньше числа $3a+4$.

Ответ. Если $a \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty)$, то $a^2 > 3a+4$; если $a=-1$ или $a=4$, то $a^2 = 3a+4$; если $a \in (-1;4)$, то $a^2 < 3a+4$.

Пример 3. *Определить наибольшее из чисел* $1-a^2$, $-2a-7$, $(a+1)/3$, $a-1$ и $-(a+1)/3$.

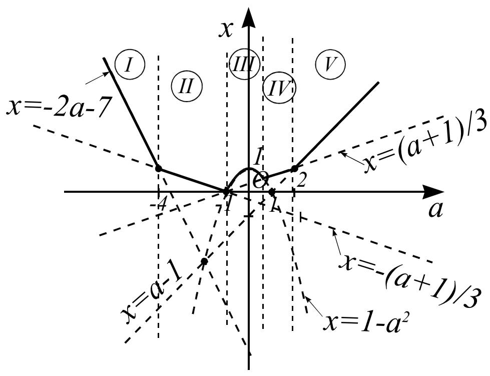


Рис. 2

Решение. Воспользуемся графическим методом. Для этого построим в системе координат Oxa графики функций $x=1-a^2$, $x=-2a-7$, $x=(a+1)/3$ $x=a-1$ и $x=-(a+1)/3$ (см. рис. 2).

Для каждого значения переменной a, проводя вертикальную прямую $a=const$, определяем ординаты ее точек пересечения с построенными графиками функций. Ясно, что при фиксированном значении a, из чисел $1-a^2$, $-2a-7$, $(a+1)/3$, $a-1$ и $-(a+1)/3$

будет наибольшим то, для которого ордината точки пересечения соответствующего графика и прямой $a = const$ будет наибольшей.

Точки $-4, -1, 2/3$ и 2 разбивают числовую прямую Oa на пять промежутков. На каждом из них записываем ответ.

Замечание. Искомое значение лежит на графике функции $f(a) = \max\{1 - a^2, -2a - 7, (a+1)/3, a - 1, -(a+1)/3\}$. График $f(a)$ на рис. 2 нарисован сплошной линией.

Ответ. Если $a \le -4$, то $-2a - 7$; если $-4 < a \le -1$, то $-(a+1)/3$;
если $-1 < a \le 2/3$, то $1 - a^2$; если $2/3 < a \le 2$, то $(a+1)/3$;
если $a > 2$, то $a - 1$.

Пример 4. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} x^2 - 5ax + 6a^2 \le 0, \\ x - a - 2 > 0. \end{cases}$

Решение. Корнями уравнения $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$ являются числа $2a$ и $3a$. Решением первого неравенства системы является множество $[x_1; x_2]$, где $x_1 = \min\{2a; 3a\}$ и $x_2 = \max\{2a; 3a\}$. Или $[2a; 3a]$ при $a \ge 0$ и $[3a; 2a]$ при $a < 0$.

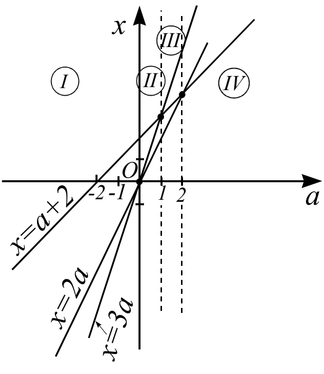


Рис. 3

Решением второго неравенства является множество $(a + 2; +\infty)$.

Решение системы представляет собой пересечение множеств решений первого и второго неравенств.

Для сравнения чисел $2a$, $3a$ и $a + 2$ воспользуемся графическим способом (см. рис. 3). На рисунке видно, если $a < 1$, то $a + 2$ больше $2a$ и $3a$, и $a + 2 = 3a > 2a$ при $a = 1$, и, следовательно, при $a \le 1$ система не имеет решений; если $1 < a < 2$, то $3a > a + 2 > 2a$ и $x \in (a + 2; 3a]$ – решение системы; если $a = 2$, то $3a > a + 2 = 2a$ и $x \in (2a; 3a]$; если $a > 2$, то $3a > 2a > a + 2$ и $x \in [2a; 3a]$.

Ответ. Если $a \le 1$, то система не имеет решений; если $1 < a < 2$, то $x \in (a + 2; 3a]$; если $a = 2$, то $x \in (2a; 3a]$; если $a > 2$, то $x \in [2a; 3a]$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1.1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение является (1) квадратным; (2) неполным квадратным; (3) линейным.

а) $5a(a-2)x^2+(5a-2)x-a^3-3=0$; б) $ax(ax+3)+6=x(ax-6)$.

1.1.2. Определите допустимые значения параметра a в уравнении.

а) $\dfrac{ax}{a^2-9}=\dfrac{a}{a^3+27}$; б) $\dfrac{x}{a-2}\geq\dfrac{(a+3)x}{(a-2)(a+3)}$;

в) $\dfrac{x}{a-2}=\sqrt{a^3-2a^2}$; г) $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-2}}\geq\dfrac{1-x}{\sqrt{a^2-2}}$.

1.1.3. Определите контрольные значения параметра a.

а) $(2a-3)x=a^2-4$; б) $5a(a-2)x^2+(5a-2)x-a^3=0$;

в) $(a^2-4)x\geq 2-a-a^2$; г) $2a(ax-1)x-8(x^2+a)x=5$;

д) $\dfrac{2a-1}{x}+(a+2)x=2a^3-a^2$; е) $(a-3)\sin x=a^3-9a$.

1.1.5. Отмечая на числовой оси Oa контрольные значения и получаемые в ходе решения ответы, решите данные примеры.

а) $\dfrac{a^2-4}{2a-4}\cdot x\geq\dfrac{a^2+5a+6}{a+3}$; б) $ax^2+4ax+4a\leq x^2-2x-3$;

в) $\dfrac{x}{a(x+1)}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$.

1.1.6. Сравните числа. а) a^2-4a и $2a-5$; б) $-a^2$, -2 и a;

в) $1-a^2$, $-2a-7$ и $a-1$.

1.1.7. Определите наименьшее из чисел.

а) $1-a^2$, $-2a-7$, $(a+1)/3$, $a-1$ и $-(a+1)/3$;

б) $(1-a)/5$, $(a+1)/3$, $a-1$ и $-(a+1)/3$.

1.1.8. Для каждого значения параметра a решите данные совокупность и систему неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2-5ax+6a^2\leq 0, \\ x-a-2>0; \end{array}\right.$ б) $\begin{cases} x^2+(2-a)x-2a\geq 0, \\ x+a^2\geq 0. \end{cases}$

§ 1.2. Уравнения и неравенства первой степени

Уравнения

Линейным уравнением называют уравнение вида $ax+b=0$, где $a\neq 0$. Значение параметра $a=0$ является ***контрольным***, поскольку в этом случае либо решение отсутствует ($0\cdot x+b=0$, $b\neq 0$), либо решением является любое $x\in\mathbb{R}$ $(0\cdot x+0=0)$.

Пример 1. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$(a-1)(a+2)x=a^3+2a^2.$$

Решение. Контрольными являются значения параметра a, при которых $(a-1)(a+2)=0$, т.е. $a=1$ и $a=-2$.

При $(a-1)(a+2)\neq 0$, поделив обе части уравнения на выражение $(a-1)(a+2)$, получим $x=\dfrac{a^3+2a^2}{(a-1)(a+2)}=\dfrac{a^2(a+2)}{(a-1)(a+2)}=\dfrac{a^2}{a-1}$.

При $a=1$ уравнение не имеет решений, поскольку левая часть равна нулю, а правая отлична от нуля.

При $a=-2$ уравнению удовлетворяет любое $x\in\mathbb{R}$, так как уравнение имеет вид $0\cdot x=0$.

Ответ. Если $a=1$, то решений нет; если $a=-2$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\neq 1,\ a\neq -2$, то $x=\dfrac{a^2}{a-1}$.

Пример 2. *Определить, при каком значении параметра a не имеет решений уравнение*

$$(a-1)(a-5)x-2(a+6)=5x-12.$$

Решение. После раскрытия скобок в левой части и приведения подобных, уравнение преобразуется к виду $(a^2-6a)x=2a$ (*).

Если $a^2-6a\neq 0$, то решение уравнения существует и $x=\dfrac{2a}{a^2-6a}$.

Если же $a^2-6a=0$, то уравнение (*) не будет иметь решения в случае, когда правая часть не равна 0, т.е. при $2a\neq 0$. Этим условиям удовлетворяет значение параметра $a=6$.

Ответ. $a=6$.

Пример 3. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$a(a-2)x = 2 - a .$$

Решение. Контрольными являются значения параметра a, при которых выражение $a(a-2)=0$, т.е. $a=0$ и $a=2$.

При $a(a-2)\neq 0$ можно найти x, поделив обе части уравнения на множитель $a(a-2)$. Получим $x = \dfrac{2-a}{a(a-2)} = -\dfrac{1}{a}$.

При $a=0$ левая часть уравнения равна нулю, а правая нет. Следовательно, уравнение при $a=0$ не имеет решения.

При $a=2$ обе части уравнения при любом значении x равны нулю. Поэтому любое $x\in\mathbb{R}$ есть решение.

Ответ. Если $a=2$, то $x\in\mathbb{R}$;
если $a=0$, то решений нет;
если $a\neq 0$ и $a\neq 2$, то $x=-\dfrac{1}{a}$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$a^2 x = a(x+2) - 2 .$$

Решение. Данное уравнение приведем к виду $(a^2-a)x = 2(a-1)$. Контрольные значения параметра a получаются из условия $a^2-a=0$, т.е. $a=0$ или $a=1$.

При $a=0$ уравнение не имеет решений, так как оно имеет вид $0\cdot x=-2$ (левая часть уравнения равна нулю, а правая нет).

При $a=1$ уравнение имеет вид $0\cdot x=0$, т.е. обе его части при любом значении x равны нулю. В этом случае корнем уравнения является любое действительное число.

При $a\neq 0$ и $a\neq 1$ деля обе части уравнения на $a^2-a\neq 0$, получаем $x=\dfrac{2(a-1)}{a(a-1)}=\dfrac{2}{a}$.

Ответ. Если $a=1$, то $x\in\mathbb{R}$;
если $a=0$, то решений нет;
если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x=\dfrac{2}{a}$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\frac{2-a}{x}=\frac{a+1}{x-2}.$$

Решение. Это уравнение не является линейным, но при $x\neq 0$ и $x\neq 2$ приводится к следующему виду $(2-a)(x-2)=(a+1)x$ или $(1-2a)x=2(2-a)$. При $a\neq 0,5$ множитель при x отличен от нуля. Разделив обе части уравнения на $1-2a$, получим $x=\dfrac{2(2-a)}{1-2a}$. Учтем ограничения, т.е. $x=\dfrac{2(2-a)}{1-2a}\neq 0$ и $x=\dfrac{2(2-a)}{1-2a}\neq 2$.

Из уравнения $\dfrac{2(2-a)}{1-2a}=0$ получаем $a=2$, а из $\dfrac{2(2-a)}{1-2a}=2$ следует $a=-1$. Следовательно, при значениях параметра $a=2$ и $a=-1$ уравнение не имеет решения.

Рассмотрим случай $a=0,5$. В этом случае исходное уравнение имеет вид $\dfrac{1,5}{x}=\dfrac{1,5}{x-2}$ или $x-2=x$. Это уравнение не имеет решений.

Ответ. Если $a\in\{-1;\ 0,5;\ 2\}$, то решений нет;

$x=\dfrac{2(2-a)}{1-2a}$ при других значениях a.

Пример 6. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\frac{2-a}{ax}=\frac{a+1}{x-2a}.$$

Решение. Данное уравнение при $ax\neq 0$ и $x\neq 2a$ сводится к линейному: $(2-a)(x-2a)=ax(a+1)$ или $(a^2+2a-2)x=2a^2-4a$. При $a^2+2a-2\neq 0$ (т.е. при $a\neq -1\pm\sqrt{3}$) получим $x=\dfrac{2a^2-4a}{a^2+2a-2}$. Учтем, что $x\neq 0$ и $x\neq 2a$, т.е. найдем те значения параметра a, при которых выражение $\dfrac{2a^2-4a}{a^2+2a-2}$ равно 0 или $2a$. Равенство выполняется при $a=-1$, $a=0$ и $a=2$. При $a=-1\pm\sqrt{3}$ уравнение не имеет решений.

Ответ. Если $a\in\{-1;0;2;-1\pm\sqrt{3}\}$, то решений нет;

$x=\dfrac{2a^2-4a}{a^2+2a-2}$ при других значениях a.

Неравенства

Неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, где $a\neq 0$ называются ***линейными неравенствами***. Значение параметра $a=0$, так же как и для линейного уравнения, является контрольным.

Пример 7. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $ax>1$.

Решение. Поскольку при решении неравенства придется делить на a, необходимо рассмотреть три случая: $a<0$, $a=0$, $a>0$.

В случае $a<0$ при делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный, поэтому получим $x<1/a$.

При $a=0$ неравенство не имеет решений.

В случае $a>0$ получаем $x>1/a$.

Ответ. Если $a<0$, то $x<1/a$; если $a=0$, то решений нет; если $a>0$, то $x>1/a$.

Замечание. При решении неравенств следует обращать внимание на то, что формальное решение, т.е. решение, при котором левые и правые части неравенства делятся на выражение, содержащее параметр или переменную, может привести к неверному ответу. Необходимо следить за знаком выражения, на которое делятся обе части неравенства.

Пример 8. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $a^2x\geq 4x+2-a$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду

$$(a^2-4)x\geq 2-a.$$

Контрольные значения параметра получаем из условия $a^2-4=0$, т.е. $a=-2$ или $a=2$. Эти значения разбивают ось Oa на три промежутка (см. рис. 4):

1) $a < -2$; 2) $-2 < a < 2$; 3) $a > 2$.

На каждом из этих промежутков решим неравенство $(a^2 - 4)x \geq 2 - a$. Значения $a = -2$ и $a = 2$ требуют отдельного исследования.

При $a = -2$ неравенство имеет вид $0 \cdot x \geq 4$ и не имеет решений.

При $a = 2$ получается неравенство $0 \cdot x \geq 0$ и его решением является любое $x \in \mathbb{R}$.

Если $a < -2$ или $a > 2$, то $a^2 - 4 > 0$. В этом случае $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$.

Если $2 > a > -2$, то $a^2 - 4 < 0$ и $x \leq -\dfrac{1}{a+2}$.

Нанесем получаемые в ходе решения ответы на соответствующие промежутки числовой оси Oa (см. рис. 4).

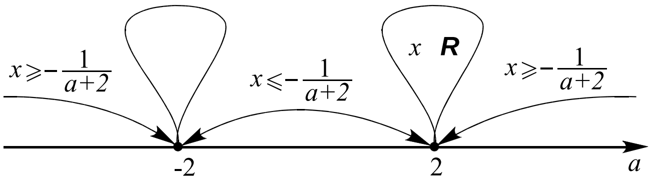


Рис. 4

Ответ. Если $a < -2$, то $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$; если $a = -2$, то решений нет;

если $-2 < a < 2$, то $x \leq -\dfrac{1}{a+2}$; если $a = 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

если $a > 2$, то $x \geq -\dfrac{1}{a+2}$.

Замечание. Из приведенных примеров видно, что решение уравнений и неравенств с параметром отличается от решения уравнений и неравенств без параметра тем, что на всех этапах решения нужно более внимательно следить за каждой операцией с точки зрения ее выполнимости при различных значениях параметра, а также за тем, чтобы полученные решения не выходили за рамки допустимых значений переменной.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a решите уравнение.

1.2.1. а) $(a-3)x=1$; б) $(a^2-4)x=2-a$;

в) $(2a-1)(a+2)x=2a^3-a^2$; г) $(a-3)(a+3)x=a^3-9a$.

1.2.2. а) $(a^3-2a^2)x=\dfrac{a-2}{a+1}$; б) $(a^2-9)x=\dfrac{a^3+27}{a}$.

1.2.3. а) $3ax=a^2x-3+a$; б) $a^2x=a(x-3)+3$.

1.2.4. а) $\dfrac{a-1}{x-a}=a^2-1$; б) $\dfrac{a^2-4}{x+a}=a+2$.

1.2.5. а) $\dfrac{a^2-4}{x-3}=\dfrac{a^2-2a}{2x+4}$; б) $\dfrac{2-a}{x-2a}=\dfrac{a-1}{ax}$;

в) $\dfrac{a}{3a+x}=\dfrac{2}{b+x}$.

1.2.6. Определите, при каком значении параметра a не имеет решений уравнение:

а) $(a-1)(a-5)x-2(a+6)=5x-12$;

б) $(a^2+6a+5)x-2(a+6)=(a+5)x-4$.

1.2.7. Для каждого значения параметров a и b решите уравнение.

а) $\dfrac{ax-b}{a+b}+\dfrac{a+bx}{a-b}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$; б) $\dfrac{a+x-2b}{2a-b}-1=\dfrac{a-2b}{x}$.

В задачах 1.2.8.-1.2.10. для каждого значения параметра a решите данное неравенство.

1.2.8. а) $(a-2)x>a+1$; б) $(a^2-9)x<1$;

в) $(a^2-4)x\le\dfrac{a-2}{a+4}$.

1.2.9. а) $a(a-2)x\ge 2-a$; б) $(a^2-9)x<a^3-9a$.

1.2.10. а) $(a^2-4)x\ge(a-4)x+1-a$;

б) $x-2\cdot\dfrac{a-1}{a}<\dfrac{2}{3a}(x+1)$; в) $\dfrac{ax+1}{3}-\dfrac{x-4a}{2}\ge\dfrac{a^2}{6}$.

§1.3. Системы линейных уравнений

Рассмотрим линейную функцию $y = kx + b$, где $k, b \in \mathbb{R}$. График линейной функции – прямая. Число k – ее ***угловой коэффициент***, численно равный тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс. Выражение $ax + by + c = 0$ также задает прямую на плоскости Oxy и называется ***общим уравнением прямой на плоскости*** Oxy. В основе задач, связанных с системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными, лежит вопрос об исследовании взаимного расположения на плоскости двух прямых, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

не имеющая решений называется ***несовместной***, имеющая ровно одно решение – ***определенной***, имеющая более одного – ***неопределенной***.

Если коэффициенты в уравнениях системы зависят от параметра, и ставится вопрос об исследовании системы, это означает, что необходимо указать значения параметра, при которых система несовместна, не определена, определена, и найти ее решения.

Задача 1. *Пусть* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *и* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *– общие уравнения двух прямых на плоскости. Эти прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают. Исходя из этого, вывести условия, которым должны удовлетворять коэффициенты* a_1, b_1, c_1 *и* a_2, b_2, c_2, *чтобы система двух линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имела единственное решение; имела бесконечно много решений; не имела решений.

Решение. При $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$ приведем уравнения к виду

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} = k_1x + m_1 \text{ и } y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} = k_2x + m_2.$$

Прямые совпадают, если $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$, и параллельны в случае $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$. Если прямые совпадают, то координаты каждой точки прямой удовлетворяют системе уравнений, т.е. система имеет бесконечно много решений. В случае параллельности прямых, у них нет общих точек и, соответственно, система не имеет решений.

Прямые пересекаются, если их угловые коэффициенты не равны, т.е. $k_1 \neq k_2$. В этом случае системе удовлетворяют координаты всего одной точки (точки пересечения прямых), и, следовательно, система имеет единственное решение.

Если в каком-либо уравнении оба коэффициента при переменных x и y равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то система не имеет решений.

Если один из коэффициентов b_i $(i = 1; 2)$ равен нулю, а другой отличен от нуля, то соответствующее уравнение $a_i x = -c_i$ задает прямую, параллельную оси Oy, а другое – не параллельную ей. В этом случае имеется одна общая точка и одно решение системы.

Если оба коэффициента b_i $(i = 1; 2)$ равны нулю, то имеем две параллельные прямые $a_1 x = -c_1$ и $a_2 x = -c_2$, при $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ решений нет, при $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ прямые совпадают, имеется бесконечно много решений.

Ответ. При $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ – бесконечно много решений; при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ – решений нет; при $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ – единственное решение; если $b_1 = 0$ или $b_2 = 0$ и $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ – единственное решение; если $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то при $\frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ решений нет, а при $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ система имеет бесконечно много решений.

Пример 1. *Исследовать систему линейных уравнений*

$$\begin{cases}(a-2)x+27y=4{,}5,\\ 2x+(a+1)y=3.\end{cases}$$

Решение. Используя решение предыдущей задачи, определим значения параметра a, при которых $\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{27}{a+1}$. Это возможно, если $a^2-a-56=0$ ($a+1\neq 0$), т.е. при $a=8$ или $a=-7$.

Если $a=8$ или $a=-7$, то решений нет, так как $\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{27}{a+1}\neq\dfrac{3}{2}$.

При $a\neq 8$ и $a\neq -7$, умножая первое уравнение системы на –2, а второе на $a-2$, и складывая левые и правые части уравнений, из полученного линейного уравнения найдем $y=\dfrac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}$. Аналогично действуя, найдем $x=\dfrac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}$. Следовательно, система при $a\neq 8$ и $a\neq -7$ имеет единственное решение.

Ответ. Если $a=-7$ или $a=8$, то решений нет;

если $a\neq -7$ и $a\neq 8$, то $\left(\dfrac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)};\dfrac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}\right)$.

Пример 2. *Определить, при каких значениях параметра* a *уравнения* $x+ay=1$ *и* $ax+y=2a$ *имеют хотя бы одно общее решение.*

Решение. Решим обратную задачу. Найдем значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x+ay=1,\\ ax+y=2a\end{cases}$ не имеет решений. Это возможно (см. решение задачи 1), если $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{1}{2a}$ (*).

Из равенства $\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{1}$ находим $a=-1$ или $a=1$. Для этих значений неравенство в (*) также выполняется.

Ответ. $a=-1$ или $a=1$.

Пример 3. *При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что уравнения $2x+by=ac^2+c$ и $bx+2y=c-1$ имеют хотя бы одно общее решение?*

Решение. Уравнения $2x+by=ac^2+c$ и $bx+2y=c-1$ имеют хотя бы одно общее решение, если имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 2x+by=ac^2+c, \\ bx+2y=c-1. \end{cases}$$

Возможны следующие варианты.

а) Система уравнений имеет единственное решение. В этом случае коэффициенты при неизвестных таковы, что $\dfrac{2}{b}\neq\dfrac{b}{2}$, т.е. $b\neq-2$ и $b\neq 2$. При $b\neq-2$ и $b\neq 2$ система имеет решение для любых a и c.

б) Система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Это возможно, если $\dfrac{2}{b}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{ac^2+c}{c-1}$.

При $b=2$ получаем условие $ac^2+c=c-1$ или $ac^2=-1$. Следовательно, c найдется лишь при $a<0$ (*).

При $b=-2$ имеем $ac^2+c=1-c$ или $ac^2+2c-1=0$. В этом случае c найдется, когда дискриминант уравнения $D=4+4a\geq 0$, т.е. при $a\geq-1$ (**).

Поскольку по условию задачи надо найти значения a, при которых существует хотя бы одно c такое, что данные уравнения имеют хотя бы одно общее решение для любого b, то значения c найдутся при одновременном выполнении условий (*) и (**), т.е. при $-1\leq a<0$.

Ответ. $-1\leq a<0$.

Пример 4. *Исследовать систему уравнений* $\begin{cases} ax-by=0, \\ a^2x-by=ab. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим случаи $b=0$ и $b\neq 0$.

1) $b=0$. Если $a=0$, то решением являются любые пары действительных чисел $(x;y)$. Если $a\neq 0$, то система имеет вид $\begin{cases} ax=0, \\ a^2x=0. \end{cases}$

Ее решением является любая пара чисел вида $(0;y)$, где $y \in \mathbb{R}$.

2) $b \neq 0$. Если $a = 0$, то система имеет вид $\begin{cases} by = 0, \\ by = 0. \end{cases}$ Ее решением является любая пара чисел вида $(x;0)$, где $x \in \mathbb{R}$.

Если $a \neq 0$, то из условия $\frac{a}{a^2} = \frac{b}{b} = 1$ следует $a = 1$ и система имеет вид $\begin{cases} x - by = 0, \\ x - by = b. \end{cases}$ В этом случае решений нет.

При $a \neq 1$ и $a \neq 0$ система имеет единственное решение вида $\left(\frac{b}{a-1}; \frac{a}{a-1} \right)$.

Ответ. Если $a = 0$ и $b = 0$, то $(x;y)$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$;
если $a \neq 0$ и $b = 0$, то $(0;y)$, где $y \in \mathbb{R}$;
если $a = 0$ и $b \neq 0$, то $(x;0)$, где $x \in \mathbb{R}$;
если $a \neq 1$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то единственное решение $\left(\frac{b}{a-1}; \frac{a}{a-1} \right)$;
если $a = 1$ и $b \neq 0$, то нет решений.

Задачи для самостоятельного решения

1.3.1. При каких значениях m не имеет решений система уравнений: а) $\begin{cases} (m^2+4)x + my = 7, \\ 4x + y = m; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+2m)x + 5y = 7, \\ (2+m)x + 4y = 8? \end{cases}$

1.3.2. Определите, при каких значениях a имеет бесчисленное множество решений система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a+1)y = -1. \end{cases}$

1.3.3. Определите, при каких значениях параметра a не имеет решений система уравнений: а) $\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1, \\ (3a+14)x + (a+8)y = 5a^2 + 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3ax + 2y = 6a - 12, \\ (2,5a + 2)x + (a - 2)y = 14 - 7a. \end{cases}$

1.3.4. Исследуйте систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = -4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = 2 - 2a^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - by = b + 2, \\ (b + 1)x + 2by = 2b + 4. \end{cases}$

1.3.5. Определите, при каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что каждая из следующих систем имеет хотя бы одно решение: а) $\begin{cases} x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + by = a, \\ bx + (b + 2)y = c^2 + ac. \end{cases}$

1.3.6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения параметра b система уравнений имеет хотя бы одно решение (x, y, z):

а) $\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b - 6)x + 2by - 4z = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} bx - (b^2 - 2)y + az^2 = 0, \\ -x + (5b - 9)y - 2z = 2. \end{cases}$

1.3.7. Определите, при каких значениях параметра a имеет единственное решение в целых числах система неравенств:

а) $\begin{cases} x + 3y > 24, \\ y - x < 6, \\ ay > x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y < 6, \\ 2y - x > 15, \\ x > ay - 2. \end{cases}$

1.3.8. Определите, при каких значениях параметра a координаты хотя бы одной точки отрезка AB будут являться решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - y + a \le 0, \\ 6x + 3y + 5a \ge 0, \end{cases}$ если $A(0;9)$ и $B(3;6)$;

б) $\begin{cases} 2x + y - 2a \ge 0, \\ 2y - 5x - a \le 0, \end{cases}$ если $A(2;2)$ и $B(4;8)$.

ГЛАВА II. Квадратный трехчлен

Справочный материал

Квадратным трехчленом называют выражение ax^2+bx+c, где $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$. График квадратного трехчлена – ***парабола***. Прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ – ее ***ось симметрии***. Точка $(x_в;y_в)$ – ***вершина параболы***, где $x_в=-\dfrac{b}{2a}$, $y_в=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. Число $D=b^2-4ac$ – ***дискриминант***. Абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox ***являются корнями квадратного трехчлена***, т.е. решениями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (2.1)$$

и вычисляются с помощью формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2.2)$$

При $D<0$ уравнение (2.1) не имеет корней (парабола не пересекает ось Ox); при $D=0$ – один корень $x_1=\dfrac{-b}{2a}$ (парабола касается оси Ox в точке x_1); при $D>0$ – два корня $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2).

При решении уравнения (2.1) значение параметра $a=0$ является ***контрольным***, так как в этом случае уравнение не является квадратным.

Всякий квадратный трехчлен (квадратичная функция) $f(x)=ax^2+bx+c$ представим в виде $f(x)=a(x-x_в)^2+y_в$.

Множество значений квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$:

$$E_f=[y_в;+\infty) \text{ при } a>0 \text{ и } E_f=(-\infty;y_в] \text{ при } a<0.$$

Если $a>0$, то ***наименьшее значение*** $\min\limits_x f(x)=y_в$; если $a<0$, то ***наибольшее значение*** $\max\limits_x f(x)=y_в$.

§2.1. Решение квадратных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров

Наиболее распространенным типом задач с параметром, связанных с квадратным трехчленом, являются задачи по определению корней квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра. При их решении используется формула (2.2) и исследуется дискриминант. Отдельно необходимо рассматривать случай, когда коэффициент при x^2 равен нулю и уравнение не является квадратным, и формула (2.2) неприменима.

Как уже отмечалось выше, ответ задачи должен содержать решения для всех значений параметра в порядке возрастания его от $-\infty$ до $+\infty$. Для компактности ответа возможно объединение промежутков для параметра, на которых формулы решения совпадают.

Рассмотрим несколько типовых примеров.

Пример 1. *Для каждого действительного значения параметра* a *решить квадратное уравнение* $ax^2+2x+1=0$.

Решение. При $a=0$ исходное уравнение является линейным и имеет вид $2x=-1$. В этом случае уравнение число $x=-0,5$ – его корень.

При $a \neq 0$ исходное уравнение является квадратным. Его дискриминант $D=4-4a$. Квадратное уравнение имеет решение при $D \geq 0$, т.е. при $a \leq 1$.

Если $a=1$, то $D=0$ и уравнение имеет один корень $x=-1$.

Если $a \neq 0$ и $a<1$, то исходное уравнение имеет два корня $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$.

Если $a>1$, то $D<0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $a \in (-\infty;0) \cup (0;1)$, то уравнение имеет два корня

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-a}}{a} \text{ и } x_2=\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a};$$

если $a=0$, то $x=-0,5$;

если $a=1$, то $x=-1$;

если $a > 1$, то решений нет.

Пример 2. *Для каждого действительного значения параметра* a *решить квадратное уравнение*

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0 .$$

Решение. При $a = 0$ уравнение имеет вид $2x = 0$, откуда получаем $x = 0$.

При $a \neq 0$ дискриминант $D = 4(a+1)^2 - 8a^2 = -4(a^2 - 2a - 1)$. Уравнение имеет решение при $D \geq 0$, т.е. при $a \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$.

Если $a = 1-\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; если $a = 1+\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$.

При $a \in (1-\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1+\sqrt{2})$ уравнение имеет два решения $x_1 = \dfrac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$ и $x_2 = \dfrac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$.

При $a \notin [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ уравнение не имеет решений.

Ответ. Если $a \in (-\infty;\, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$, то решений нет;
если $a = 1-\sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$;
если $a = 1+\sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$;
если $a \in (1-\sqrt{2}; 0) \cup (0; 1+\sqrt{2})$, то уравнение имеет два решения

$$x_1 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a} .$$

Далее рассмотрим пример, в котором параметр в явном виде не содержится, но задача в ходе решения сводится к исследованию существования корней квадратного уравнения с коэффициентами, зависящими от параметра.

Пример 3. *Найти наименьшее значение* x*, при котором существуют числа* y *и* z *такие, что выполняется равенство*

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1 .$$

Решение. Рассмотрим данное равенство как квадратное уравнение относительно переменной z

$$z^2-(x+y)z+(x^2+2y^2+xy-1)=0, \qquad (2.3)$$
где переменные x и y являются параметрами.

Уравнение (2.3) имеет решение, если его дискриминант D неотрицателен ($D=(x+y)^2-4(x^2+2y^2+xy-1)=-3x^2-7y^2-2xy+4$).

$$D\ge 0 \Leftrightarrow -3x^2-7y^2-2xy+4\ge 0.$$

Рассмотрим последнее неравенство как квадратное неравенство относительно переменной y

$$7y^2+2xy+(3x^2-4)\le 0, \qquad (2.4)$$
где переменная x является параметром.

Неравенство (2.4) имеет решение, если его дискриминант D_1 неотрицателен ($D_1=4x^2-28\cdot(3x^2-4)=112-80x^2$).

$$D_1\ge 0 \Leftrightarrow 112-80x^2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5}\ge x^2 \Leftrightarrow \sqrt{7/5}\ge x\ge -\sqrt{7/5}.$$

Наименьшее значение x, при котором существует решение y неравенства (2.4) и решение z уравнения (2.3), равно $-\sqrt{7/5}$. Следовательно, $-\sqrt{7/5}$ – наименьшее значение x, удовлетворяющее условию задачи.

Задачи для самостоятельного решения

2.1.1. Решите уравнение:

а) $x^2=a$; б) $x^2=a^2-3a-4$;

в) $ax^2=4$; г) $(a^2-3a-4)x^2=4$;

д) $ax^2=a^2$; е) $ax^2=a^3-3a^2-4a$;

ж) $(a^2-3a-4)x^2=a-4$; з) $(a^2-3a-4)x^2=4+3a-a^2$.

2.1.2. Решите уравнение:

а) $(a^2-6a+5)x^2-(a-5)x=0$;

б) $(a^2-3a-4)x^2-(a^3-16a)x=0$.

2.1.3. Решите уравнение:

а) $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$;

б) $x^2+(2-a)x+4a-8=0$.

2.1.4. Решите уравнение:

а) $x^2-2(a+1)x+4a=0$; б) $x^2+(a+1)x+\dfrac{a^2}{4}=0$.

2.1.5. Решите уравнение:

а) $ax^2+2x+1=0$; б) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$;

в) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$; г) $ax^2-(a+1)x+a^2+a=0$.

2.1.6. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$:

а) поменять местами коэффициенты a и c, то получится уравнение, корни которого будут обратны корням данного;

б) поменять знак коэффициента b, то получится уравнение, корни которого будут противоположны корням данного;

в) коэффициенты a и c разных знаков, то оно имеет действительные корни;

г) коэффициент a положителен и дискриминант равен нулю, то левая часть уравнения есть полный квадрат и, наоборот, если левая часть уравнения есть полный квадрат, то коэффициент a положителен и дискриминант равен нулю;

д) все коэффициенты рациональны и дискриминант есть полный квадрат рационального числа, то корни уравнения рациональны.

2.1.7. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения (кратные корни уравнения считать одним решением):

а) $x^2+2ax+3=0$; б) $ax^2+2x+3=0$;

в) $(a-1)x^2+2ax+3=0$; г) $(a+2)x^2+5(a+2)x+1=0$.

2.1.8. Решите уравнение:

а) $x^4+4a^3x^2-5a^6=0$; б) $x^4-2(a+1)x^2+4a=0$.

2.1.9. Пусть числа x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+ax+bc=0$, а числа x_2 и x_3 – корни уравнения $x^2+bx+ac=0$. Докажите, что числа x_1 и x_3 – корни уравнения $x^2+cx+ab=0$, если $ac\neq bc$.

§2.2. График квадратного трехчлена

Пример 1. *Определить знаки коэффициентов* a, b *и* c*, если график квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *имеет вид, изображенный на рис. 5.*

Решение. Знак коэффициента a определяется направлением ветвей параболы. Так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$.

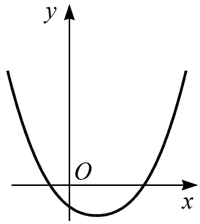


Рис. 5

Из условия $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ получается значение ординаты точки пересечения параболы с осью Oy На рисунке 5 видно, что $c < 0$.

Вершина параболы расположена правее оси Oy, т.е. $x_в = -\dfrac{b}{2a} < 0$. Так как $a > 0$ и $x_в > 0$ получаем, что $b < 0$.

Ответ. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Пример 2. *Определить знак числа* c*, если известно, что квадратный трехчлен* $ax^2 + bx + c$ *не имеет корней и, кроме того, справедливо неравенство* $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c < 0$.

Решение. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то его график не имеет общих точек с осью абсцисс, т.е. расположен выше (ветви параболы направлены вверх) или ниже (ветви параболы направлены вниз) оси Ox. Это означает, что для всех значений x квадратный трехчлен $f(x)$ принимает значения одного знака.

Заметим, что $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c =$

$$= \sqrt{7}(3a - \sqrt{3}\,b + c) = \sqrt{7}\left(a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c\right).$$

Из условия $\sqrt{63}\,a - \sqrt{21}\,b + \sqrt{7}\,c < 0$ следует, что

$$f(-\sqrt{3}) = a(-\sqrt{3})^2 + b(-\sqrt{3}) + c < 0,$$

т.е. $f(x) < 0$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, и $f(0) < 0$, но $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, т.е. $c < 0$.

Ответ. $c < 0$.

Пример 3. *Точка* $A(6;-12)$ *является вершиной параболы* $y = ax^2 + bx + c$*, одна из ее точек пересечения с осью* Ox *имеет абсциссу, равную 8. Определить значения коэффициентов* a, b *и* c.

Решение. Координаты вершины параболы $(x_в;\ y_в)$ задаются формулами $x_в = -\dfrac{b}{2a} = 6$, $y_в = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -12$. Так как $y_в < 0$ и парабола пересекает ось абсцисс, то ее ветви направлены вверх, т.е. $a > 0$. По условию $y(8) = a8^2 + b8 + c = 0$.

Исходная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} -(b/2a) = 6, \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -12, \\ 64a + 8b + c = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -12a, \\ ac - 36a^2 = -12a, \\ c = 32a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -12a, \\ 32a^2 - 36a^2 = -12a, \\ c = 32a; \end{cases} \Rightarrow$$

$a = 3$, $b = -36$, $c = 96$.

Ответ. $a = 3$, $b = -36$, $c = 96$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *определить число решений уравнения* $x^2 + 2x - 3 = a^2 - 4a$.

Решение. График квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 3$, стоящего в левой части данного уравнения – парабола, имеющая координаты вершины $(x_в;\ y_в)$, где $x_в = -1$ и $y_в = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$. Так как ветви параболы направлены вверх, то множество значений функции $y = x^2 + 2x - 3$ представляет $[-4;+\infty)$.

Правая часть уравнения для каждого значения параметра a представляет постоянную функцию $y = a^2 - 4a$. Ее график – прямая линия, параллельная оси Ox, не имеет общих точек с параболой при $y = a^2 - 4a < -4$ (1); имеет одну общую точку при $y = a^2 - 4a = -4$ (2); две точки при $y = a^2 - 4a > -4$ (3).

Рассмотрим каждый из полученных случаев:

(1) $a^2 - 4a < -4 \Leftrightarrow (a-2)^2 < 0$ – таких a не существует;

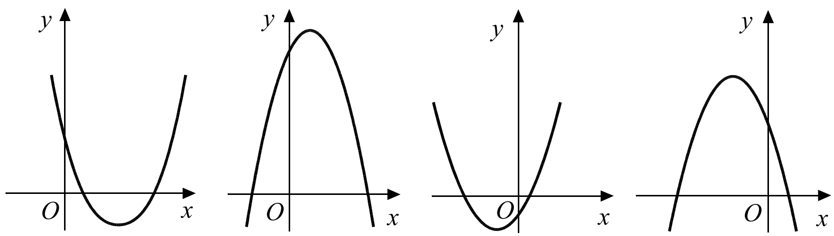
(2) $a^2-4a=-4 \Leftrightarrow (a-2)^2=0 \Leftrightarrow a=2$ – исходное уравнение имеет одно решение;

(3) $a^2-4a>-4 \Leftrightarrow (a-2)^2>0$ – при всех $a \neq 2$ исходное уравнение имеет два решения.

Ответ. Если $a=2$, то уравнение имеет одно решение; если $a \neq 2$, то – два решения.

Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Определите знаки параметров a, b и c, если график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ имеет вид, изображенный на рис. 6.



а) б) в) г)

Рис. 6

2.2.2. Известно, что точка A является вершиной параболы $y=x^2+px+q$. Найдите числа p и q, если:

а) $A(1;-2)$; б) $A(-2;-7)$.

2.2.3. Найдите числа a, b и c, если точка M является вершиной параболы $y=ax^2+bx+c$, пересекающей ось ординат в точке N:

а) $M(-1;-7)$, $N(0;-4)$; б) $M(1;5)$, $N(0;1)$.

2.2.4. Постройте график функции:

а) $y=x^2-6x+a$, наименьшее значение которой равно 1;

б) $y=-x^2+4x+a$, наибольшее значение которой равно 2.

2.2.5. Найдите коэффициенты a, b и c квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

а) $f(-2) = 9,\ f(1) = 3,\ f(3) = 19;$

б) $f(-3) = -11,\ f(0) = 10,\ f(2) = -6.$

2.2.6. Определите знак коэффициента a квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что:

а) $f(-1) < 1,\ f(1) > -1,\ f(3) < -4;$

б) $f(-3) < -5,\ f(-1) > 0,\ f(1) < 4$.

2.2.7. Определите значения параметра c, при которых уравнение $5x^2 - 4x + c = 0$:

а) имеет различные действительные корни;

б) имеет один корень (т.е. имеет корень двойной кратности);

в) не имеет действительных корней;

г) имеет хотя бы один общий корень с уравнением $x^2 + 13x - 30 = 0$.

2.2.8. Найдите все значения параметра b, при которых график функции $y = x^2 + bx + 4$:

а) пересекает ось абсцисс в двух точках;

б) касается оси абсцисс;

в) лежит выше оси абсцисс.

В каждом из пунктов выберите подходящее значение параметра и постройте график соответствующей функции.

2.2.9. Исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x) = 2x^2$ и $g(x) = 5x - c$ в зависимости от значений параметра c.

2.2.10. В зависимости от значений параметра a исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x) = ax^2 - 3$ и $g(x) = 4x + 1$;

б) $f(x) = ax^2 - 8x + 5$ и $g(x) = x^2 - 2ax + 1$.

2.2.11. В зависимости от значений параметра b исследуйте взаимное расположение графиков функций $f(x) = 2bx^2 + 2x + 1$ и $g(x) = 5x^2 + 2bx - 2$.

В каждом из пунктов задач 2.2.12 и 2.2.13 при найденных значениях параметра постройте график соответствующей функции.

2.2.12. Определите все значения параметра a, при которых график функции $y = 2x^2 - 3x + a$:

а) лежит выше оси абсцисс; б) касается оси абсцисс;

в) пересекает ось абсцисс в двух точках;

г) пересекает ось абсцисс в двух точках по правую сторону от оси ординат;

д) пересекает ось абсцисс в двух точках по разные стороны от оси ординат.

2.2.13. Определите все значения параметра a, при которых график функции $y = -x^2 - 4x + 3a$:

а) лежит ниже оси абсцисс; б) касается оси абсцисс;

в) пересекает ось абсцисс в двух точках;

г) пересекает ось абсцисс в двух точках по левую сторону от оси ординат;

д) пересекает ось абсцисс в двух точках по разные стороны от оси ординат.

2.2.14. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + x + a$ принимает только положительные значения;

б) $-x^2 + 6x + a$ принимает только отрицательные значения?

2.2.15. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения:

а) $x^2 + 4x + 5 = a^2 - 2a - 2$; б) $6x - 2x^2 + 1{,}5 = a^2 - 5a$.

2.1.16. Определите знак чисел a и c, если известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и, кроме того, справедливо неравенство:

а) $4\sqrt{2}\,a - \sqrt{24}\,b + 3\sqrt{2}\,c < 0$; б) $\dfrac{\sqrt{12}}{3}a - 2b + 2\sqrt{3}\,c > 0$.

2.1.17. Докажите, что при изменении параметра a вершина параболы:

а) $y = x^2 + (2a+1)x + a^2 - 1$ описывает прямую линию;

б) $y = x^2 - (2a+1)x + 2a$ описывает параболу.

§ 2.3. Необходимые и достаточные условия, задающие возможные случаи расположения корней квадратного трехчлена

Задачи с параметром часто сводятся к исследованию квадратного трехчлена с коэффициентами, зависящими от параметра. Решение каждой такой задачи можно разделить на два этапа. Первый этап состоит в переформулировке исходной задачи и сведении ее к исследованию квадратного трехчлена. Второй – в исследовании полученного квадратного трехчлена, сводящемся к определению необходимых и достаточных условий для реализации одной или нескольких возможностей, приведенных в следующей ниже задаче. В каждом из рассматриваемых случаев вывод необходимых и достаточных условий может быть осуществлен аналитически. Однако каждый из них допускает графическую интерпретацию и, как будет показано ниже, позволяет достаточно просто вывести аналитические условия с использованием возможных для конкретного случая вариантов расположения графика соответствующего квадратного трехчлена.

Задача 2. С помощью дискриминанта D квадратного трехчлена ax^2+bx+c с положительным коэффициентом a абсциссы $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ вершины соответствующей параболы, а также значений функции в отдельных точках, сформулируйте необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот квадратный трехчлен:

а) не имел корней; б) имел единственный корень;

в) имел два корня, расположенные по разные стороны от числа d;

г) имел два корня, между которыми лежит отрезок $[d_1;d_2]$;

д) имел два корня, каждый из которых больше числа d;

е) имел два корня на отрезке $[d_1;d_2]$;

ж) имел два корня, расположенных по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1;d_2)$ и $(d_3;d_4)$;

з) не имел корней, больших числа d;

и) не имел корней на отрезке $[d_1;d_2]$;

к) имел хотя бы один корень, больший числа d;

л) имел хотя бы один корень на отрезке $[d_1;d_2]$;

м) имел ровно один корень, больший числа d;

н) имел ровно один корень на интервале $(d_1; d_2)$.

Решение. а) Квадратный трехчлен не имеет корней, если его дискриминант отрицательный. Условие $D < 0$ или $b^2 - 4ac < 0$ – необходимое и достаточное.

б) Квадратный трехчлен имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Условие $D = 0$ или $b^2 - 4ac = 0$ – необходимое и достаточное.

Для вывода необходимых и достаточных условий в последующих пунктах данной задачи воспользуемся ***методом графической интерпретации,*** т.е. выведем аналитические условия из графического представления задачи.

в) Если квадратный трехчлен имеет два корня, расположенные по разные стороны от числа d, то (см. рис. 7) значение $f(d) = ad^2 + bd + c$ – отрицательно, т.е. условие $f(d) < 0$ – необходимое и достаточное.

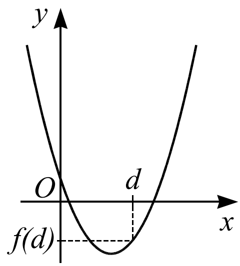


Рис. 7

г) Если квадратный трехчлен имеет два корня, между которыми расположен отрезок $[d_1; d_2]$, то (см. рис. 8) оба его значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ отрицательны, т.е. необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

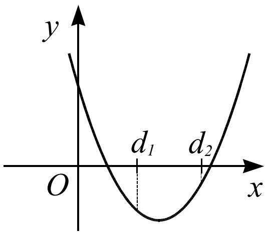


Рис. 8

$$\begin{cases} f(d_1) < 0, \\ f(d_2) < 0. \end{cases}$$

д) Если квадратный трехчлен имеет два корня, каждый из которых больше числа d, то (см. рис. 9) его значение $f(d)$ положительно (иначе см. пункт в)), дискриминант положителен (условие существования корней) и абсцисса вершины параболы расположена правее числа d. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

$$\begin{cases} f(d) > 0, \\ D > 0, \\ x_в > d. \end{cases}$$

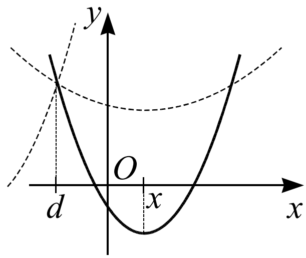


Рис. 9

е) Если квадратный трехчлен имеет два корня на отрезке $[d_1; d_2]$, то (см. рис. 10) оба значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ неотрицательны (иначе см. пункт в)), дискриминант положителен (условие существования корней) и абсцисса вершины параболы расположена между числами d_1 и d_2. Следовательно, необходимое и достаточное условие представляется системой неравенств:

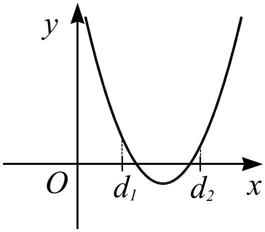


Рис. 10

$$\begin{cases} f(d_1) \geq 0, \\ f(d_2) \geq 0, \\ D > 0, \\ d_1 < x_в < d_2. \end{cases}$$

ж) Если квадратный трехчлен имеет два корня, расположенные по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1; d_2)$ и $(d_3; d_4)$ (см. рис. 11), то это возможно только, если его значения $f(d_1)$ и $f(d_2)$ (аналогично $f(d_3)$ и $f(d_4)$) разного знака. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить системой неравенств:

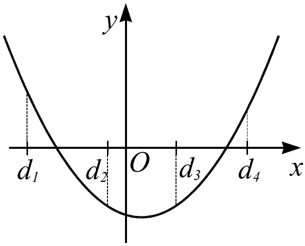


Рис. 11

$$\begin{cases} f(d_1) \cdot f(d_2) < 0, \\ f(d_3) \cdot f(d_4) < 0. \end{cases}$$

з) Квадратный трехчлен не имеет корней, больших числа d в двух случаях (см. рис. 12): либо он вообще не имеет корней ($D<0$), либо корни есть, но они не превышают d. Следовательно, необходимое и достаточное условие можно представить следующей совокупностью:

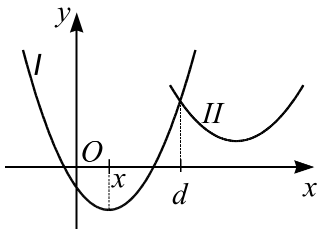


Рис. 12

$$\left[\begin{array}{l} \text{(II) } D<0, \\ \text{(I) } \begin{cases} f(d)\ge 0, \\ x_в \le d. \end{cases} \end{array}\right.$$

и) На рисунке 13 представлены четыре возможных варианта расположения графиков квадратного трехчлена, удовлетворяющих условию данного пункта задачи.

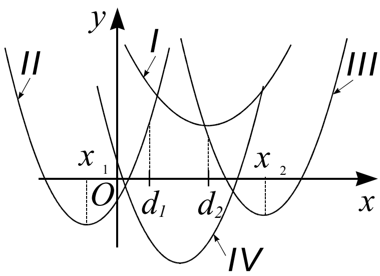


Рис. 13

I. Квадратный трехчлен не имеет корней $D<0$.

II. Корни квадратного трехчлена расположены на оси Ox левее числа d_1, что задается условиями

$$\begin{cases} f(d_1)>0, \\ x_в \le d_1. \end{cases}$$

Замечание. Условие неотрицательности дискриминанта $D \ge 0$ включать в систему не обязательно, так как в противном случае выполняется условие случая I.

III. Корни квадратного трехчлена расположены на оси Ox правее числа d_2, что задается условиями $\begin{cases} f(d_2)>0, \\ x_в \ge d_2. \end{cases}$

IV. Отрезок $[d_1;d_2]$ расположен между корнями квадратного трехчлена, т.е. при выполнении условий $\begin{cases} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0. \end{cases}$

Объединяя полученные условия, получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) } D<0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1)>0, \\ x_в \le d_1, \end{cases} \\ \text{(III) } \begin{cases} f(d_2)>0, \\ x_в \ge d_2, \end{cases} \\ \text{(IV) } \begin{cases} f(d_1)<0, \\ f(d_2)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

к) На рисунке 14 представлены возможные варианты расположения графиков квадратного трехчлена, удовлетворяющих условию данного пункта задачи. По аналогии с предыдущим пунктом (объединив случаи I и III) задачи получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

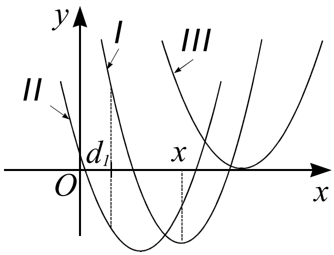


Рис. 14

$$\left[\begin{array}{l} \text{(II) } f(d)<0, \\ \text{(I) и (III) } \begin{cases} D\ge 0, \\ x_в > d. \end{cases} \end{array}\right.$$

л) На рисунке 15 представлены возможные варианты расположения графика квадратного трехчлена, имеющего хотя бы один корень на отрезке $[d_1;d_2]$. По аналогии с предыдущими пунктами задачи получаем совокупность необходимых и достаточных условий:

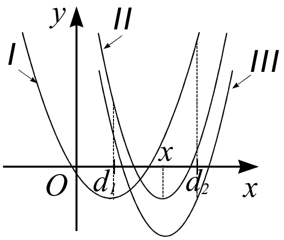


Рис. 15

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) и (III) } f(d_1)\cdot f(d_2)\le 0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1)>0, \\ f(d_2)>0, \\ D\ge 0, \\ d_1 < x_в < d_2. \end{cases} \end{array}\right.$$

м) На рисунке 16 представлены возможные варианты расположения графиков квадратных трехчленов, имеющих ровно один корень, больший числа d. Необходимые и достаточные условия задаются совокупностью:

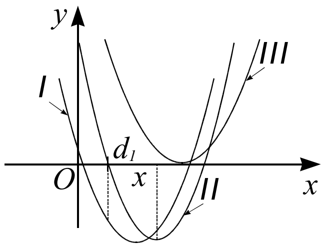


Рис. 16

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) } f(d)<0, \\ \text{(II) и (III) } \begin{cases} x_в > d, \\ \left[\begin{array}{l} D=0, \\ f(d)=0. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

н) На рисунке 17 представлены возможные варианты расположения графиков квадратных трехчленов, имеющих ровно один корень на промежутке $(d_1;d_2)$. Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I) и (III) } f(d_1)\cdot f(d_2)<0, \\ \text{(II) } \begin{cases} f(d_1)=0, \\ d_1 < x_в < \dfrac{d_1+d_2}{2}, \end{cases} \\ \text{(V) } \begin{cases} D=0, \\ d_1 < x_в < d_2, \end{cases} \\ \text{(IV) } \begin{cases} f(d_2)=0, \\ \dfrac{d_1+d_2}{2} < x_в < d_2. \end{cases} \end{array}\right.$$

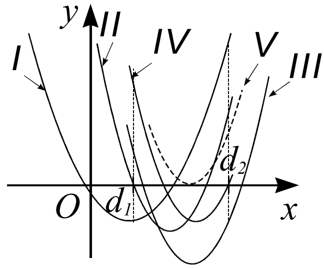


Рис. 17

Замечание. Нет необходимости запоминать все приведенные выше ответы. Достаточно при записи необходимых и достаточных условий уметь пользоваться графическим представлением задачи.

Преимущество использования метода графической интерпретации в сравнении с использованием формул (2.2) заключается в том, что метод графической интерпретации позволяет свести задачу определения принадлежности корней заданному промежутку к решению системы рациональных неравенств.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим нескольких типовых примеров, связанных с исследованием квадратного трехчлена

Пример 1. *При каких значениях параметра* a *уравнение* $x^2-2(a-1)x+a+5=0$ *имеет только положительные корни*?

Решение. Согласно результату пункта д) рассмотренной выше задачи для этого необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} f(0)=a+5>0, \\ D=4(a-1)^2-4(a+5)>0, \\ x_в=a-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5, \\ a^2-3a-4>0, \\ a>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5, \\ (a-4)(a+1)>0, \\ a>1. \end{cases}$$

Получаем, что условию задачи удовлетворяют значения параметра $a>4$. ***Ответ.*** $a>4$.

Пример 2. *Найти все значения* p*, при каждом из которых уравнение* $(2+p)x^2-2px+3p=0$ *имеет два положительных корня.*

Решение. В данной задаче необходимо рассмотреть два случая $2+p>0$ (ветви параболы направлены вверх) и $2+p<0$ (ветви – вниз). Дискриминант уравнения $D=-8p(3+p)>0$. Согласно предыдущим результатам получаем систему неравенств (см. рис. 18)

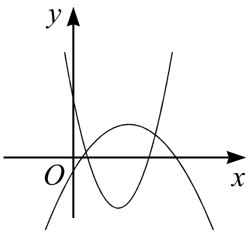


Рис. 18

$$\begin{cases} D=-8p(3+p)>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)>0, \\ p+2>0, \\ x_в>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)<0, \\ p+2<0, \\ x_в>0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<p<0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3p>0, \\ p>-2, \\ \dfrac{2p}{2(2+p)}>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3p<0, \\ p<-2, \\ \dfrac{2p}{2(2+p)}>0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < p < 0, \\ \left[\begin{array}{l} p > 0, \\ p < -2; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -3 < p < -2 .$$

Ответ. $-3 < p < -2$.

Пример 3. *Найти все действительные значения параметра* a *, при которых корни уравнения* $x^2 + x + 2a = 0$ *действительны и больше* a .

Решение. Дискриминант $D = 1 - 8a$; $D \geq 0$ при $a \leq 1/8$. Решение задачи сводится к решению системы:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(a) = a^2 + 3a, \\ x_в = -0,5 > a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0,125, \\ \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 0, \end{array} \right. \\ a < -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3 .$$

Ответ. $a < -3$.

Пример 4. *Найти все действительные значения параметра* b *, при которых корни уравнения* $x^2 - 2bx - 1 = 0$ *действительны и не превосходят по модулю* 2 .

Решение. Дискриминант $D = 4b^2 + 4 > 0$ при любом b . Согласно условию корни уравнения должны принадлежать отрезку $[-2; 2]$. Задача сводится к решению системы (см. рис. 10, $d_1 = -2$, $d_2 = 2$):

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(-2) = 4 + 4b - 1 \geq 0, \\ f(2) = 4 - 4b - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \geq -3, \\ 4b \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow -3/4 \leq b \leq 3/4 .$$

Ответ. $-3/4 \leq b \leq 3/4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.3.1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - x + a = 0$:

а) не имеет корней;

б) имеет два равных корня;

в) имеет два различных корня;

г) не имеет корней на отрезке $[-2;1]$;

д) имеет два различных корня на отрезке $[-2;1]$;

е) имеет хотя бы один корень на отрезке $[-2;1]$;

ж) имеет ровно один корень на отрезке $[-2;1]$;

з) не имеет корней, меньших -2.

2.3.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $-x^2+4x-3a=0$: а) не имеет корней;

б) имеет два равных корня; в) имеет два различных корня;

г) не имеет корней на промежутке $[-1;4)$;

д) имеет два различных корня на промежутке $[-1;4)$;

е) имеет хотя бы один корень на промежутке $[-1;4)$;

ж) имеет ровно один корень на промежутке $[-1;4)$;

з) не имеет корней, больших 4.

2.3.3. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2-2(a-1)x+a+5=0:$$

а) имеет только отрицательные корни;

б) имеет корни разного знака?

2.3.4. Найдите все значения p, при каждом из которых уравнение

а) $2x^2+px+5=0$ имеет хотя бы один положительный корень;

б) $2x^2-3px+2-p=0$ не имеет положительных корней;

в) $4x^2-8px+p-3=0$ имеет два отрицательных корня;

г) $(p+1)x^2+px-2=0$ не имеет отрицательных корней.

2.3.5. Найдите все значения p, при каждом из которых корни уравнения $(p-2)x^2-2px+p+3=0$ заключены в интервале $(1;3)$.

2.3.6. Определите, сколько решений, удовлетворяющих заданным ограничениям, в зависимости от значений параметра a имеет уравнение:

а) $4x^2-2x+a=0$, где $-1\le x\le 2$;

б) $x^2-2ax-1=0$, где $-2<x<2$;

в) $(2a+3)x^2+(a-1)x+4a+3=0$, где $0<x<2$.

2.3.7. Определите, при каких значениях параметра p при всех x таких, что $1<x<2$, справедливо неравенство $x^2+px-7p<0$.

§ 2.4. Задачи на применение теорем Виета

Многие задачи, связанные с квадратным трехчленом, и методы их решения основаны на применении прямой и обратной теорем Виета.

Теорема Виета. ***Сумма корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна отношению второго коэффициента к первому, взятому с противоположным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к первому коэффициенту:***

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета. ***Если существуют действительные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.***

К типу задач, основанных на применение теорем Виета, относятся задачи, в которых требуется определить такие значения параметра, при которых сумма или произведение корней квадратного трехчлена равна какому–либо числу; сумма квадратов или кубов корней квадратного трехчлена принимает наибольшее или наименьшее значение и т.д. Обычно применение теорем Виета значительно упрощает решение.

Пример 1. *Определите, при каких значениях параметра a сумма корней квадратного трехчлена $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю.*

Решение. Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = a^2 + a - 2 .$$

Сумма корней равна нулю, если $a^2 + a - 2 = 0$, т.е. при $a = 1$ и $a = -2$.

При этих значениях a получается уравнение $x^2 - a^2 = 0$, которое имеет два действительных корня.

Ответ. $a = 1$ и $a = -2$.

Пример 2. *При каких значениях параметра* a *произведение корней квадратного трехчлена* $x^2+2x+(a^2-5a+6)=0$ *равно* 2?

Решение. Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета $x_1\cdot x_2=a^2-5a+6$. Произведение корней равно 2, если $a^2-5a+6=2$, т.е. при $a=1$ и $a=4$. При этих значениях a исходное уравнение имеет вид $x^2+2x+2=0$ и не имеет действительных корней.

Ответ. Таких a не существует.

Пример 3. *Определить значения параметра* a *, при которых сумма* S *квадратов корней уравнения* $x^2+(2-a)x-(3+a)=0$ *является наименьшей? Чему равна эта сумма?*

Решение. Дискриминант уравнения $D=(2-a)^2+4(3+a)=a^2+16$. Так как $D>0$ при всех значениях a, то корни существуют. Из теоремы Виета следует $x_1+x_2=-(2-a)$, $x_1\cdot x_2=-(3+a)$. Тогда $S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a-2)^2+2(3+a)=a^2-2a+10=$ $=(a-1)^2+9$. Наименьшее значение суммы квадратов корней равно 9 и достигается при $a=1$.

Ответ. $a=1,\ S=9$.

Пример 3. *При каких значениях параметра* a *уравнение* $x^4-(5a+6)x^2+4a^2+6a=0$ *имеет два решения?*

Решение. Уравнение $x^4-(5a+6)x^2+4a^2+6a=0$ будет иметь два решения в следующих случаях:

(а) уравнение

$$y^2-(5a+6)y+4a^2+6a=0\text{, где } y=x^2 \quad (*)$$

имеет единственный корень и он положительный;

(б) уравнение (*) имеет два корня разного знака.

Найдем дискриминант D уравнения (*):

$$D=(5a+6)^2-4(4a^2+6a)=9(a+2)^2.$$

В случае (а) имеем: $D = 0$, т.е. $a = -2$. Тогда решением уравнения (*) будет $y = (5a + 6)/2 = (5 \cdot (-2) + 6)/2 = -2$. Так как корень отрицательный, то в этом случае не существует значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи.

Случай (б) равносилен тому, что произведение корней $y_1 \cdot y_2$ уравнения (*) отрицательно. По теореме Виета произведение корней равно $y_1 \cdot y_2 = 4a^2 + 6a$. Следовательно, значения параметра a, удовлетворяющие условию задачи, являются решениями неравенства $4a^2 + 6a < 0$, т. е. $-1,5 < a < 0$. ***Ответ.*** $-1,5 < a < 0$.

Задачи для самостоятельного решения

2.4.1. Определите, при каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения равна 0:
а) $x^2 - (a^2 - 5a + 6)x - a^2 + 5 = 0$; б) $x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a = 0$.

2.4.2. Определите, при каких значениях параметра a произведение корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + (a^2 - 5a + 6) = 0$ равно 0.

2.4.3. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $3x^2 - ax - b = 0$. Найдите значение выражений: а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

2.4.4. Не вычисляя корней уравнения $2x^2 + bx + a^2 = 0$, найдите значение выражений:

а) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; б) $x_2 x_1^3 + x_1 x_2^3$; в) $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2}$.

2.4.5. Известно, что квадратное уравнение имеет корни. Не решая уравнение, определите знаки корней: а) $x^2 + ax + \dfrac{3a^2}{16} = 0$;
б) $bx^2 + 2(b+1)x + 2b = 0$; в) $(m^2 - 5m + 6)x^2 + (3m - 5)x + 2 = 0$.

2.4.6. Определите все значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет корни, и определите знаки корней:
а) $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$; б) $3ax^2 + (4 - 6a)x + 3(a-1) = 0$;
в) $(a-3)x^2 - 2(3a-4)x + 7a - 6 = 0$; г) $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$.

2.4.7. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

2.4.8. Составьте квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, где числа x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 - 7x + 4 = 0$.

2.4.9. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше корней квадратного уравнения $3x^2 + 6x - 10 = 0$.

2.4.10. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2.4.11. Найдите все действительные значения параметра a, при которых корни уравнения $(a-3)x^2 - 2ax + 6a = 0$ действительны и положительны.

2.4.12. Определите все значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет два действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих заданному условию, если:

а) $x^2 + 3ax + a^2 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$;

б) $x^2 - ax + a - 1 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 = 17$;

в) $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ и $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

2.4.13. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$ наименьшая?

2.4.14. Определите значения параметра a, при которых сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей. Чему равна эта сумма?

2.4.15. а) При каких значениях параметра a корни уравнения $6x^2 + 3x - a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \frac{63}{8}$?

б) При каком положительном значении параметра a корни уравнения $2x^2 + ax - 18 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{65}{324}$?

2.4.16. При каких значениях параметра a имеет два корня уравнение: а) $x^4 - (3a-1)x^2 + 2a^2 - a = 0$; б) $x^4 - (4a-5)x^2 + 3a^2 - 5a = 0$?

§2.5. Решение квадратичных неравенств

При решении квадратичных неравенств используется следующее утверждение. ***Если дискриминант*** D ***квадратного трехчлена*** $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ ***положителен, то решение неравенства*** $x^2 + bx + c < 0$ ***есть множество*** $x \in (x_1; x_2)$***; решение неравенства*** $x^2 + bx + c \le 0$ ***– множество*** $x \in [x_1; x_2]$***, где*** x_1, x_2 ***– корни трехчлена. Решение неравенства*** $x^2 + bx + c > 0$ ***есть множество*** $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$***; решение неравенства*** $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ ***– множество*** $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$***. Если же*** $D < 0$***, то для всех*** $x \in \mathbb{R}$ ***выполняется неравенство*** $y = ax^2 + bx + c > 0$***.***

Замечание. При $a < 0$ умножением обеих частей неравенства на (-1) оно приводится к одному из неравенств, рассмотренных выше.

При решении квадратичных неравенств с коэффициентами, зависящими от параметра, иногда бывает полезно использовать метод графической интерпретации.

Пример 1. *Найти все значения параметра* a*, для которых неравенство* $ax^2 + (a-1)x + a - 3 < 0$ *выполняется при всех действительных значениях* x.

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство имеет вид $-x - 3 < 0$ и справедливо при $x \in (-3; +\infty)$. При $a \ne 0$ исходное неравенство является квадратичным и, может выполняться при всех $x \in \mathbb{R}$ в случае, если ветви параболы $y = ax^2 + (a-1)x + a - 3$ направлены вниз и она не пересекает ось абсцисс. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = (a-1)^2 - 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 3a^2 - 10a - 1 > 0. \end{cases}$$

Решением последней системы неравенств являются все значения $a < \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.

Ответ. $a < \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.

Пример 2. *При каких значениях параметра a существует хотя бы одно общее решение неравенств*

$$x^2 + 4ax + 3a^2 > 1 + 2a \text{ и } x^2 + 2ax < 3a^2 - 8a + 4 \ ?$$

Решение. Решим сначала уравнения $x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 = 0$ и $x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 = 0$. Корни первого $x_{1,2} = -2a \pm (a+1)$; корни второго $x_{3,4} = -a \pm 2(a-1)$. Коэффициенты при x^2 в данных неравенствах положительны, поэтому решением $x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0$ является множество значений x, лежащих на числовой прямой за корнями x_1 и x_2, а решением $x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 < 0$ – интервал между x_3 и x_4. Корнями первого уравнения являются числа $-3a - 1$ и $-a + 1$, второго – числа $-3a + 2$ и $a - 2$.

Выясним, при каких значениях параметра a корень $-3a - 1$ лежит на числовой прямой Ox правее корня $-a + 1$. Для этого решим неравенство $-3a - 1 > -a + 1$. Его решением будет $a < -1$. Соответственно, при $a > -1$ корни расположены в обратном порядке. Отметим, что не существует ни одного общего решения неравенств, если корни второго уравнения лежат между корнями первого. Найдем значения параметра, соответствующие отмеченному случаю, а затем исключим их.

Для этого решим совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < -1, \\ -a + 1 \le -3a + 2 \le -3a - 1, \\ -a + 1 \le a - 2 \le -3a - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a > -1, \\ -3a - 1 \le -3a + 2 \le -a + 1 \\ -3a - 1 \le a - 2 \le -a + 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система не имеет решений. Решением второй являются $a \in [0,5; 1,5]$. Исключая найденные значения, получаем ответ.

Ответ. $a \in (-\infty; 0,5) \cup (1,5; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

2.5.1. На рис. 19 изображены графики двух квадратных трехчленов $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Числа x_1, x_2 и x_3, x_4 – их корни соответственно. Используя числа x_1, x_2 и x_3, x_4, запишите ответы приведенных ниже систем и совокупностей неравенств.

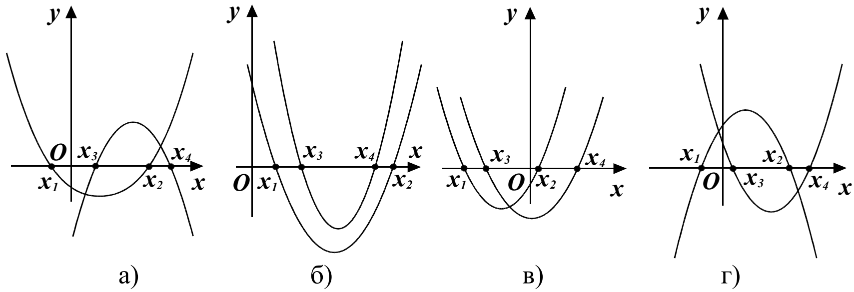


Рис. 19

Для рис. 19а. 1) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19б. 4) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

6) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19в. 7) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \geq 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0; \end{cases}$

9) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0, \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0. \end{array} \right.$

Для рис. 19г. 10) $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1<0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\ge 0; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1>0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\le 0; \end{cases}$

12) $\left[\begin{array}{l} a_1x^2+b_1x+c_1>0, \\ a_2x^2+b_2x+c_2\ge 0. \end{array}\right.$

Для каждого значения параметра a решите неравенства.

2.5.2. а) $x^2\ge a$; б) $x^2<a$; в) $x^2\le a^2-3a-4$;

г) $ax^2>4$; д) $(a^2-3a-4)x^2\le 4$;

е) $ax^2\ge a^2$; ж) $ax^2\le a^3-3a^2-4a$;

з) $(a^2-3a-4)x^2>a-4$; и) $(a^2-3a-4)x^2<4+3a-a^2$.

2.5.3. а) $x^2-2(a+1)x+4a>0$; б) $x^2+(a+1)x+\dfrac{a^2}{4}<0$.

2.5.4. а) $x^2-2(a-1)x+2a+1\ge 0$; б) $x^2+(2-a)x+4a-8\le 0$.

2.5.5. а) $(a^2-6a+5)x^2-(a-5)x\ge 0$;

б) $(a^2-3a-4)x^2-(a^3-16a)x<0$.

2.5.6. а) $ax^2+2x+1\ge 0$; б) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2\le 0$.

2.5.7. Найдите все значения параметра m, для которых неравенство

$$mx^2-4x+3m+1>0$$

будет выполнено при всех $x>0$.

2.5.8. Найдите все значения параметра a, для которых при всех $x\in\mathbb{R}$ будет выполнено неравенство.

а) $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$;

б) $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$.

§2.6. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

Пример 1. *Найти все значения параметра* a*, при которых оба уравнения* $x^2+\dfrac{8}{a}x-2a=0$ *и* $x^2+\dfrac{6}{a}x-a=0$ *имеют по два различных корня и между корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения (т.е. корни* ***перемежаются****).*

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения, а x_3 и x_4 – корни второго. Рассмотрим случай расположения корней на числовой оси следующим образом: x_1, x_3, x_2, x_4. Тогда

$$x_3^2+\frac{8}{a}x_3-2a<0 \text{ и } x_4^2+\frac{8}{a}x_4-2a>0\,.$$

Следовательно,

$$\left(x_3^2+\frac{8}{a}x_3-2a\right)\left(x_4^2+\frac{8}{a}x_4-2a\right)<0$$

или после раскрытия скобок

$$x_3^2x_4^2+\frac{8}{a}x_3x_4(x_3+x_4)+\frac{64}{a^2}x_3x_4-2a(x_3^2+x_3^2)-16(x_3+x_4)+4a^2<0 \quad (*)$$

По теореме Виета $x_3+x_4=-\dfrac{6}{a},\ x_3x_4=-a$. Тогда

$$x_3^2+x_3^2=(x_3+x_4)^2-\,2x_3x_4=\frac{36}{a^2}+2a\,.$$

Тогда неравенство (*) запишется в виде

$$a^2+\frac{8}{a}(-a)\left(-\frac{6}{a}\right)+\frac{8}{a}(-a)-a\left(\frac{36}{a^2}+2a\right)-16\left(-\frac{6}{a}\right)+4a^2<0$$

или

$$a^2+\frac{8}{a}<0\,.$$

Из последнего неравенства получаем, что в этом случае $-2<a<0$.

Случай расположения корней x_3,x_1,x_4,x_2 рассмотрите самостоятельно.

Пример 2. *Найти все значения параметра* a *, при которых корни уравнений*

$$x^2 + 4x + 4a = 0 \ \text{и} \ x^2 + 3x + 6a = 0$$

не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного уравнения нет ни одного корня другого уравнения.

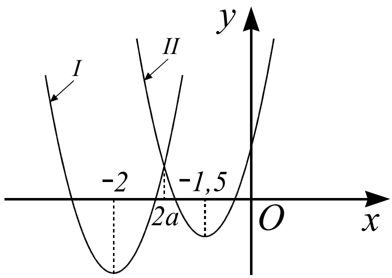


Рис. 20

Решение. Дискриминант первого уравнения $D_1 = 16(1-a)$, второго уравнения $D_2 = 9 - 24a$. Оба уравнения имеют корни, если их дискриминанты одновременно неотрицательны, т.е. при $a \le \dfrac{3}{8}$.

Абсцисса вершины первой параболы $x_в = -2$, а второй – $x_в = -\dfrac{3}{2}$ (см. рис. 20). Найдем абсциссу точки пересечения парабол, для этого решим уравнение

$$x^2 + 4x + 4a = x^2 + 3x + 6a.$$

Получим $x = 2a$.

Необходимые и достаточные условия того, что исходные уравнения имеют по два корня и эти корни удовлетворяют требованию задачи, состоят в следующем:

$$\begin{cases} D_1 \ge 0, \\ D_2 \ge 0, \\ -2 < x_1 < -1{,}5, \\ f_1(2a) = 4a^2 + 8a + 4a > 0, \\ f_2(2a) = 4a^2 + 6a + 6a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 3/8, \\ -1 < a < -3/4, \\ a \ne 1, \\ \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 0. \end{array} \right. \end{cases}.$$

Эта система не имеет решений.

Ответ. Таких a не существует.

Пример 2. *Найти все значения параметра* a *, при которых уравнения* $x^2+ax+1=0$ *и* $x^2+x+a=0$ *имеют хотя бы один общий корень.*

Решение. Дискриминант первого уравнения $D_1=a^2-4$, второго $D_2=1-4a$. Оба уравнения имеют корни, если $D_1\ge 0$, $D_2\ge 0$, т.е. если $a\le -2$. Пусть x_1 есть их общий корень. Тогда $x_1^2+ax_1+1=0$ и $x_1^2+x_1+a=0$. Вычтем из первого равенства второе, получим $x_1(a-1)=a-1$, т.е. при $a\ne 1$ уравнение имеет корень $x_1=1$. Подставив $x_1=1$ в уравнения, получим $a=-2$. При $a=1$ дискриминанты отрицательны.

Ответ. $a=-2$.

Пример 3. *Найти множество значений функции* $y=\dfrac{x^2-10x+7}{2x^2-1}$.

Решение. Если уравнение $\dfrac{x^2-10x+7}{2x^2-1}=a$ (1) имеет решение, то число a входит в множество значений функции y. Выясним при каких значениях a уравнение (1) имеет решение.

$$\frac{x^2-10x+7}{2x^2-1}=a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2a-1)x^2-10x-a-7}{2x^2-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}(2a-1)x^2-10x-a-7=0,\\ 2x^2-1\ne 0.\end{cases}$$

Уравнение $(2a-1)x^2-10x-a-7=0$ (2) при $a=0{,}5$ является линейным и $x=3/4$ – его корень. При $a\ne 0{,}5$ уравнение (2) является квадратным и имеет решение, если его дискриминант неотрицателен, где $D=100-4(2a-1)(a+7)=4(2a^2+13a+18)$. Неравенство $2a^2+13a+18\ge 0$ имеет решение при $a\in(-\infty;-4{,}5]\cup[-2;+\infty)$.

Заметим, что знаменатель дроби $2x^2-1$ обращается в нуль при $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Числа $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ не являются корнями уравнения (2) ни при каком значении параметра a. В этом можно убедиться, подставив их в левую часть уравнения (2). Например,

$$(2a-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-a-7=-\frac{15}{2}-\frac{10}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

Ответ. $E_y=(-\infty;-4,5]\cup[-2;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

2.6.1. При каких значениях параметра a имеют хотя бы один общий корень уравнения:

а) $2x^2+x-a=0$ и $2x^2-7x+6=0$;

б) $2x^2-6x+a+2=0$ и $3x^2+2x-3-a=0$?

2.6.2. При каких значениях параметра a неравенства $(6a-5)x^2-5(a-1)x+2a-6>0$ и $x^2+6x-7<0$ имеют хотя бы одно общее решение?

2.6.3. Найдите множество значений функций:

а) $y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x-1}$; б) $y=\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+x-1}$.

2.6.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех действительных значениях x выполняется неравенство:

а) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\le a$; б) $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-3x+3}\ge a$.

2.6.5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет решение данное уравнение или неравенство.

а) $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$;

б) $(1+a)\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^2-\dfrac{3a\cdot x^2}{x^2+1}+4a=0$;

в) $1+a\cdot\sin x=a^2-\sin^2 x$;

г) $2a-3+2ax^2-x^4>0$.

2.6.6. а) При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно двум?

б) При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $4x^2 - (3a+2)x + a^2 - 1 = 0$ равно трем?

2.6.7. Сформулированы следующие два утверждения:

А. Уравнение $ax - \sqrt{x} + 1 = 0$ имеет ровно одно решение.

Б. Неравенство $x^2 - 8ax + 1 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

Определите все значения параметра a, при каждом из которых оба утверждения справедливы.

2.6.8. Сформулированы следующие два утверждения:

А. Уравнение $x^2 - 4|x| + 1 = a$ не имеет решений.

Б. Неравенство $2x^2 + \left(a-2\right)x - 2a + 4 \ge 0$ справедливо при любых действительных значениях x.

Определите все значения параметра a, при каждом из которых оба утверждения справедливы.

2.6.9. Найдите все такие значения параметра a, что для любого значения параметра b уравнение $x^2 + bx + a = 0$ имеет хотя бы один корень.

2.6.10. При каких значениях параметра a корни уравнений $x^2 + 3x + 2a = 0$ и $x^2 + 6x + 5a = 0$ перемежаются?

2.6.11. При каких значениях параметра a уравнения

$$x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0 \text{ и } x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$$

имеют по два корня и между корнями одного уравнения нет ни одного корня другого уравнения?

2.6.12. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + 1{,}5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

ГЛАВА III. Графические приемы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств

Графиком функции $y = f(x),\ \ x \in D_f$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy вида $(x, f(x))$, где $x \in D_f$.

Рассмотрим приемы и методы решений задач с параметрами с использованием ***метода наглядной графической интерпретации***. В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче, можно выделить два основных графических приема: первый – построение графического образа на координатной плоскости Oxy, второй – на координатной плоскости Oxa.

Первый прием заключается в следующем. Исходное уравнение (или неравенство) преобразуют к виду $g(x) = f(x,a)$ (или $g(x) \geq f(x,a)$). На плоскости Oxy строится график функции $y = g(x)$. Функция $y = f(x)$ задает определенное семейство кривых, зависящих от параметра a. Кривые этого семейства получаются из кривой $y = f(x)$ с помощью некоторого элементарного преобразования (параллельного переноса вдоль осей, растяжения, наложения модуля или в случае линейной зависимости между x и y – поворота относительно некоторой точки). Построив графический образ уравнения $g(x) = f(x,a)$ можно установить, сколько точек пересечения имеют графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x,a)$, – это определяет количество корней уравнения $g(x) = f(x,a)$, а, следовательно, и исходного уравнения в зависимости от значения параметра. Аналогично, для неравенства $g(x) \geq f(x,a)$ можно выяснить, что представляет собой множество его решений.

При использовании второго приема исходное уравнение (или неравенство) преобразуют к виду $a = f(x)$ (или $a \geq f(x)$). На плоскости Oxa строят график функции $f(x)$, а затем, пересекая полученный график прямыми, параллельными оси Ox, получают необходимую информацию.

Аналогичные приемы используют и в случае систем:

уравнений $\begin{cases} g_1(x) = f_1(x), \\ g_2(x) = f_2(x); \end{cases}$ неравенств $\begin{cases} g_1(x) \geq f_1(x), \\ g_2(x) \geq f_2(x); \end{cases}$

уравнения и неравенства $\begin{cases} g_1(x) = f_1(x), \\ g_2(x) \ge f_2(x). \end{cases}$

Для этого строят графический образ системы и интерпретируют его в зависимости от значения параметра и условий задачи.

Лучше всего приведенные методы работают в тех случаях, когда в условии задачи ставится вопрос о количестве корней в зависимости от значений параметра или определения значений параметра, при которых решение отсутствует или единственно.

Графическое представление уравнения или системы уравнений с параметром обладает несколькими несомненными преимуществами: во-первых, построив график (графики), можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение уравнения изменение параметра; во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи и, в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве корней уравнения, об их границах и т.д.

Естественно, что при использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Требования к строгости должны определяться здравым смыслом. В случаях, когда результат, полученный с помощью графического метода, вызывает сомнения, его необходимо подкрепить аналитически. Используемый аналитический аппарат состоит из следующих теорем и утверждений.

1. Теорема Коши. ***Если непрерывная на отрезке*** $[a;b]$ ***функция*** $f(x)$ ***принимает два различных значения*** A ***и*** B***, то она принимает и любое значение*** C***, находящееся между ними (т.е.*** $A < C < B$ ***).***

2. Следствия из теоремы Коши:

а) ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a;b]$***, то она принимает на нем любые значения, лежащие между наибольшим и наименьшим значением*** $f(x)$ ***на*** $[a;b]$***.***

б) ***Если непрерывная на отрезке*** $[a;b]$ ***или на интервале*** $(a;b)$ ***функция*** $f(x)$ ***в двух точках этого промежутка имеет значения разных знаков, то в некоторой точке*** x ***указанного промежутка функция принимает значение, равное нулю.***

3. ***Если непрерывная на отрезке*** $[a;b]$ ***функция*** $f(x)$ ***монотонно возрастает, а непрерывная на отрезке*** $[a;b]$ ***функция*** $\varphi(x)$ ***монотонно убывает, и существует точка пересечения*** x_0 ***графиков этих функций (т.е.*** $\varphi(x_0)=f(x_0)$***), то такая точка единственна.***

4. ***Если на отрезке*** $[a;b]$ ***функция*** $f(x)$ ***возрастает, а функция*** $\varphi(x)$ ***убывает, причем*** $f(x)$ ***и*** $\varphi(x)$ ***непрерывны и*** $f(a)<\varphi(a)$***, а*** $f(b)>\varphi(b)$***, то на*** $[a;b]$ ***существует единственная точка пересечения графиков*** $f(x)$ ***и*** $\varphi(x)$***.***

Иногда бывает достаточно лишь построить необходимые графики и, используя свойства непрерывности и монотонности функций, сделать правильный вывод.

Для овладения графическими методами решения задач с параметрами напомним основные способы построения семейства графиков функций $f(x,a)$. Здесь будем рассматривать функции, графики которых можно построить средствами элементарной математики (т.е. без использования дифференциального исчисления). Считаем, что график функции $y=f(x)$ известен.

График функции $y=Af(ax+b)+B$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ следующими геометрическими преобразованиями:

1. а) осевой симметрии относительно оси Ox (точка $(x;y)$ переходит в точку $(x;-y)$);

   б) осевой симметрии относительно оси Oy (точка $(x;y)$ переходит в точку $(-x;y)$);

   в) центральной симметрии относительно начала координат – точки O (точка $(x;y)$ переходит в точку $(-x;-y)$);

2. а) параллельного переноса (сдвига) вдоль оси Ox (точка $(x;y)$ переходит в точку $(x+a;y)$, где a – некоторое число, при этом перенос происходит вправо $a>0$, если, и влево, если $a<0$);

   б) параллельного переноса (сдвига) вдоль оси Oy (точка $(x;y)$ переходит в точку $(x;y+b)$, где b – некоторое число, при этом перенос происходит вверх, если $b>0$, и вниз, если $b<0$);

3. а) растяжения (или сжатия) вдоль оси Ox (при растяжении (сжатии) в p раз ($p>0; p\neq 1$) вдоль оси Ox точка $(x;y)$ переходит в точку $(px;y)$);

б) растяжения (или сжатия) вдоль оси Oy (при растяжении (сжатии) в q раз ($q>0, q\neq 1$) вдоль оси Oy точка $(x;y)$ переходит в точку $(x;qy)$).

Таблица
элементарных преобразований графика функции $y=f(x)$

Функция	***Преобразование графика функции $y=f(x)$***
$y=f(x)+A$	Параллельный перенос его вдоль оси Oy на A единиц вверх при $A>0$ и на $\lvert A\rvert$ единиц вниз при $A<0$.
$y=f(x-a)$	Параллельный перенос его вдоль оси Ox на a единиц вправо при $a>0$ и на $\lvert a\rvert$ единиц влево при $a<0$.
$y=kf(x)$, $k>0$	Растяжение его вдоль оси Oy в k раз, если $k>1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0<k<1$.
$y=f(kx)$, $k>0$	Сжатие его вдоль оси Ox в k раз, если $k>1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0<k<1$.
$y=-f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси Ox.
$y=\lvert f(x)\rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть останется без изменения.
$y=f(-x)$	Симметричное отражение его относительно оси Oy.
$y=f(\lvert x\rvert)$	Часть графика, расположенная в области $x\geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x<0$ заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика для $x>0$.

Пример 1. *Построить график функции* $f(x)$ *и с его помощью определить множество значений, принимаемых функцией в двух, трех и более точках; а также определить максимальное число корней уравнения* $f(x)=a$ *:*

а) $f(x)=|x-2|$;

б) $f(x)=||x|-4|$;

в) $f(x)=|x^2-5|x|+4|$.

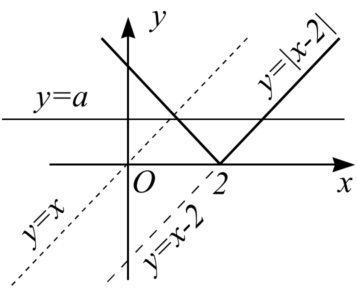


Рис. 21

Решение. а) Построим график, выполняя элементарные преобразования $\Gamma_x \to \Gamma_{x-2} \to \Gamma_{|x-2|}$ (см. рис. 21).

Проводя прямые $y=a$, убеждаемся, что при $a<0$ точек пересечения с графиком функции $f(x)=|x-2|$ нет; при $a=0$ – одна точка; при $a>0$ – две.

Ответ. $E_f=[0;+\infty)$; значение 0 принимается в одной точке; все остальные при двух различных значениях x.
Максимальное число корней уравнения $|x-2|=a$ равно двум.

Решение. б) С помощью элементарных преобразований (см. рис. 22) $\Gamma_x \to \Gamma_{|x|} \to \Gamma_{|x|-4} \to \Gamma_{||x|-4|}$ строим график функции $f(x)=||x|-4|$.

Проводя прямые $y=a$, убеждаемся, что при $a<0$ точек пересечения с графиком функции $f(x)=||x|-4|$ нет; при $a=0$ – две точки; при $0<a<4$ – четыре; при $a=4$ – три; при $a>4$ – две.

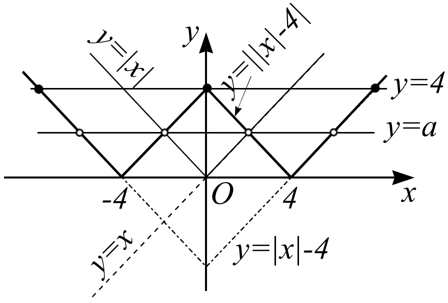


Рис. 22

Ответ. $E_f=[0;+\infty)$; значение 0 принимается в двух точках; каждое значение из интервала $(0;4)$ принимается в четырех точках;

значение 4 – в трех точках; все остальные – при двух различных значениях x. Максимальное число корней уравнения $||x|-4|=a$ равно четырем.

Решение. в) $f(x)=|x^2-5|x|+4\ |=$

$$=\begin{cases}|x^2-5x+4|, \text{ если } x\ge 0,\\ |x^2+5x+4|, \text{ если } x<0\end{cases}=\begin{cases}|(x-2{,}5)^2-2{,}25|, \text{ если } x\ge 0,\\ |(x+2{,}5)^2-2{,}25|, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований строим графики функции $f(x)=|(x-2{,}5)^2-2{,}25|$ $(\varGamma_{x^2}\to\varGamma_{(x-2,5)^2}\to\varGamma_{(x-2,5)^2-2,25}\to$

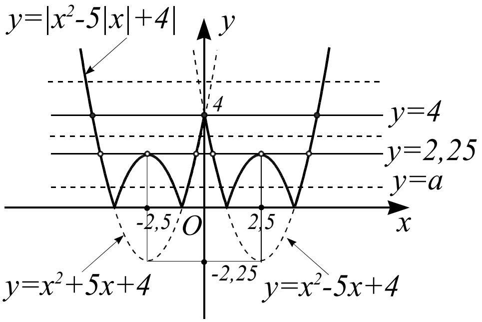


Рис. 23

$\to\varGamma_{|(x-2,5)^2-2,25|})$ и берем часть его, соответствующую значениям $x\ge 0$. Аналогично для функции $f(x)=|(x+2{,}5)^2-2{,}25|$ при $x<0$ (см. рис. 23).

Проводя прямые $y=a$, убеждаемся, что при $a<0$ они не имеют общих точек с графиком функции $f(x)=|x^2-5\ |x|+4\ |$; при $a=0$ – четыре общие точки; при $0<a<2{,}25$ – восемь; при $a=2{,}25$ – шесть; при $2{,}25<a<4$ – четыре; при $a=4$ – три; при $a>4$ – две.

Ответ. $E_f=[0;\ +\infty)$; значение 0 принимается в четырех точках; каждое значение из интервала $(0;2{,}25)$ – в восьми; значение 2,25 – в шести; каждое значение из интервала $(2{,}25;4)$ – в четырех; значение 4 – в трех; все остальные – при двух различных значениях x. Максимальное число корней уравнения $|x^2-5|x|+4|=a$ равно восьми.

Пример 2. *Исследовать на количество корней уравнение* $||2x\ |-5\ |=x+a$ *в зависимости от значений параметра* a.

Решение. Построим график $y=||2x\ |-5\ |$ (см. рис. 24).

Функция $y = x + a$ задает семейство прямых, получающихся из прямой $y = x$ параллельным переносом на a единиц вдоль оси Oy. Число решений исходного уравнения при соответствующем значении параметра a равно количеству точек пересечения графиков функции $y = ||2x|-5|$ и прямой $y = x + a$.

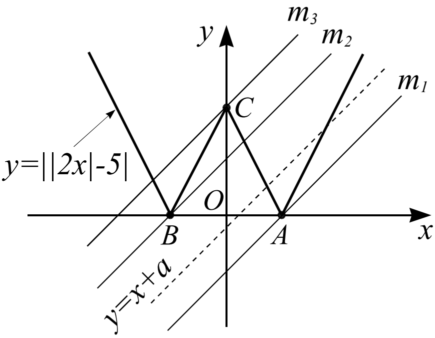


Рис. 24

Имеется три критических положения m_1, m_2 и m_3 прямых вида $y = x + a$.

Прямая m_1 проходит через точку $A(2,5;0)$, m_2 – через точку $B(-2,5;0)$, m_3 – через точку $C(0;5)$. Этим прямым соответствуют значения параметра $a_1 = -2,5$, $a_2 = 2,5$ и $a_3 = 5$ соответственно.

Ответ. Если $a < -2,5$, то решений нет; если $a = -2,5$, то одно решение; если $-2,5 < a < 2,5$, то два решения; если $a = 2,5$, то три решения; если $2,5 < a < 5$, то четыре решения; если $a = 5$, то три решения; если $a > 5$, то два решения.

Пример 3. *Определить графически количество корней уравнения* $\sqrt{1-|x|} = a$ *в зависимости от значений параметра* a.

Решение. Построим график функции $y = \sqrt{1-|x|}$ (см. рис. 25):

$$y = \sqrt{1-|x|} = \begin{cases} \sqrt{1+x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{1-x}, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$$

Функция $y = a$ задает семейство прямых, параллельных оси Oy.

Имеется два критических положения этих прямых m_1, m_2. Прямая m_1 совпадает с осью Oy, m_2 параллельна оси Ox и проходит через

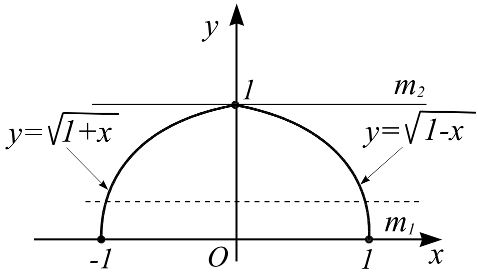


Рис. 25

точку $(0;1)$. Этим прямым соответствуют значения $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$ соответственно.

Ответ. При $a = 1$ один корень; при $0 \le a < 1$ – два корня. При всех остальных значениях параметра a решений нет.

Пример 4. *Определить графически количество корней уравнения* $\sqrt{4-|2x|} = x^2 + a$ *в зависимости от значений параметра* a.

Решение. Построим график функции $y = \sqrt{4-|2x|}$ (см. рис. 26):

$$y = \sqrt{4-|2x|} = \begin{cases} \sqrt{4+2x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{4-2x}, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$$

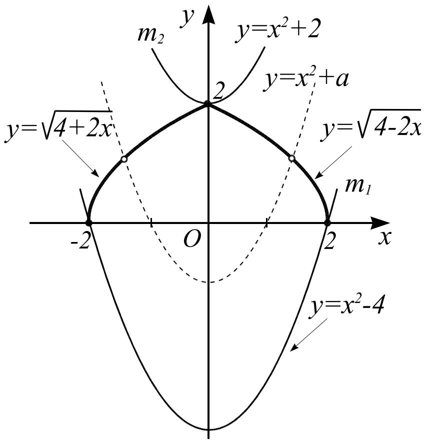


Рис. 26

Функция вида $y = x^2 + a$ задает семейство парабол, получающихся из $y = x^2$ параллельным переносом на a единиц вдоль оси Oy. Имеется два критических положения этих парабол m_1, m_2. Парабола m_1 проходит через точки $A(2;0)$ и $B(-2;0)$, m_2 – через точку $C(0;2)$. Этим параболам соответствуют значения параметра $a_1 = -4$ и $a_2 = 2$ соответственно.

Ответ. Если $a = 2$, то один корень $x = 0$; если $-4 \le a < 2$, то два корня; если $a < -4$ и $a > 2$, то уравнение действительных корней не имеет.

Пример 5. *При каких значениях параметра* a *уравнение* $3x\lg x = 1 + a\lg x$ *имеет:*

а) *одно решение;* б) *два решения?*

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду $\lg x = \dfrac{1}{3x-a}$. Найдем ОДЗ уравнения $x > 0;\ x \neq a/3$. Построим график функции $y = \lg x$. Функция $\varphi(x,a) = \dfrac{1}{3x-a}$ задает семейство гипербол, получаемых из гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ сдвигом вдоль оси Ox на $a/3$ и сжатием вдоль оси Oy в 3 раза. Две точки пересечения графиков (см. рис. 27) могут получиться лишь в том случае, если график $y = \lg x$ имеет общие точки с обеими ветвями гиперболы, т.е. при $a > 0$. При $a \leq 0$ имеется всего одна точка пересечения графика $y = \lg x$ с ветвью гиперболы, лежащей выше оси абсцисс.

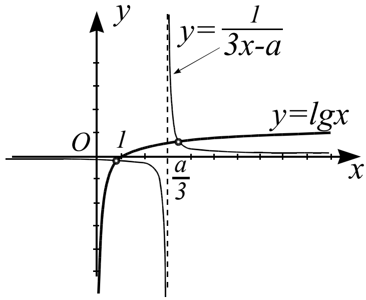


Рис. 27

Ответ. а) $a \leq 0$; б) $a > 0$.

Пример 6. *При каких значениях параметра* $a > 1$ *уравнение* $|x^2 - 4x + 3| + 1 = \log_a x$ *имеет единственное решение?*

Решение. Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3| + 1$.

Построение проведем в три этапа $\Gamma_{y=x^2-4x+3} \to \Gamma_{|y|} \to \Gamma_{|y|+1}$ (см. рис. 28). Функция $y = \log_a x$ задает семейство кривых, имеющих одну общую точку $A(1;0)$. График функции $y = |x^2 - 4x + 3| + 1$ имеет только

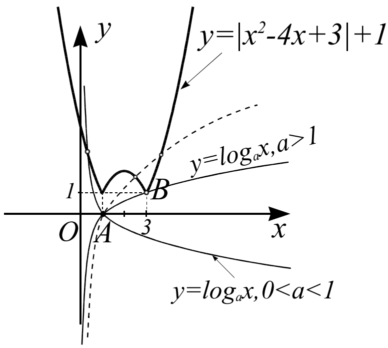


Рис. 28

одну общую точку с той кривой семейства $y=\log_a x$ при $a>1$, которая проходит через точку $B(3;1)$. Подставив координаты точки B в соотношение $y=\log_a x$, получим равенство $1=\log_a 3$, возможное при $a=3$.

Соответственно, график функции $y=|x^2-4x+3|+1$ имеет только одну общую точку с любой кривой семейства $y=\log_a x$ при $0<a<1$.

Ответ. При $a\in(0;1)\cup\{3\}$.

Поворот графика относительно точки

Рассмотрим семейство прямых вида $y-y_0=a(x-x_0)$. Все они получены друг из друга поворотом на некоторый угол относительно точки $(x_0;y_0)$ (***центр поворота***).

Пример 7. *Найти все значения параметра k, при каждом из которых имеет решение система уравнений*

$$\begin{cases} y-2=k(x+1), \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$$

Решение. Ясно, что прямые семейства $y-2=k(x+1)$ переходят друг в друга преобразованием поворота с центром в точке $A(-1;2)$. Данная система имеет решение, если указанные прямые имеют с графиком функции $y=\sqrt{x}$ хотя бы одну общую точку. Имеются два предельных значения k_1 и k_2. Первая прямая проходит через вершину, вторая касается графика $y=\sqrt{x}$ (см. рис. 29). Прямые, угловой коэффициент которых удовлетворяет неравенству $k_1\le k\le k_2$, имеют общую точку с «полупараболой».

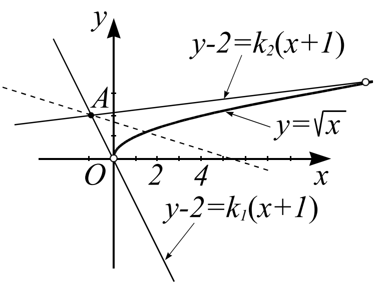


Рис. 29

Найдем значение k_1, подставив для этого в уравнение $y-2=k(x+1)$ координаты вершины $(0;0)$. Получаем $k_1=-2$.

Значение k_2 получим из выполнения условия единственности решения смешанной системы

$$\begin{cases} y-2=k(x+1), \\ y^2=x, \\ k>0. \end{cases}$$

Это означает, что уравнение $ky^2-y+k+2=0$ имеет одно решение, т.е. дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. $D=1-4k^2-8k=0$, если $k=-1+\sqrt{1,25}$.

Ответ. $-2 \le k \le -1+\sqrt{1,25}$.

Гомотетия

Рассмотрим системы уравнений, в которых одно из уравнений задает семейство кривых, получаемых друг из друга с помощью гомотетии. Например, уравнения вида $|x|+|y|=a$ или $x^2+y^2=a^2$.

Пример 8. *Изобразить графики уравнений* $|x|+|y|=a$ *и* $x^2+y^2=a^2$ *при значениях параметра* $a=2;\ 4;\ 5;\ 7$.

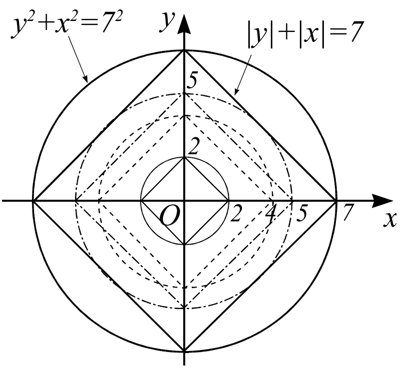


Рис. 30

Решение. Построим график уравнения $|x|+|y|=a$. Ясно, что значение a должно быть неотрицательно, иначе равенство не имеет смысла. В системе координат Oxy рассмотрим уравнение в каждой из четвертей (см. рис. 30):

$$|x|+|y|=a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=a, \text{ если } x \ge 0 \text{ и } y \ge 0, \\ -x+y=a, \text{ если } x<0 \text{ и } y \ge 0, \\ -x-y=a, \text{ если } x<0 \text{ и } y<0, \\ x-y=a, \text{ если } x \ge 0 \text{ и } y<0. \end{array} \right.$$

Графиком второго уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ является окружность радиуса a с центром в начале координат.

Уравнения $|x| + |y| = a$ и $x^2 + y^2 = a^2$ задают два семейства кривых, в каждом из которых кривые семейства являются ***гомотетичными*** (центр гомотетии – точка $O(0;0)$) квадратами в первом случае и окружностями – во втором. Из построенных рисунков видно, что при увеличении a квадраты и окружности увеличиваются.

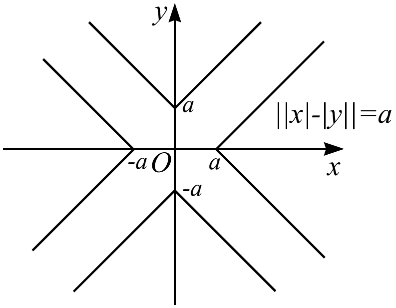


Рис. 31

Пример 9. *Построить график уравнения* $||x| - |y|| = a$.

Решение. Значение параметра должно быть положительно, иначе равенство не будет иметь смысла.

Рассмотрим уравнение в каждой из четвертей координатной плоскости Oxy (см. рис. 31):

$$||x| - |y|| = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\ x - y| = a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \\ |-x - y| = a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y \geq 0, \\ |-x + y| = a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y < 0, \\ |\ x + y| = a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x - a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \text{ и } x \geq y, \\ y = x + a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \text{ и } y > x, \\ y = -x - a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y \geq 0, \text{ и } -x \geq y, \\ y = -x + a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y \geq 0, \text{ и } y > -x, \\ y = x + a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y < 0, \text{ и } y \geq x, \\ y = x - a, \text{ если } x < 0 \text{ и } y < 0, \text{ и } y > x, \\ y = -x + a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y < 0, \text{ и } y \geq -x, \\ y = -x - a, \text{ если } x \geq 0 \text{ и } y < 0, \text{ и } -x > y. \end{array}\right.$$

Пример 10. *Определить в зависимости от значений параметра a количество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что при $a \le 0$ система не имеет решений, так как левая часть уравнения неотрицательна. Уравнение $x^2+y^2=4$ задает окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Очевидно, что если квадрат $|x|+|y|=a$ находится внутри окружности, то система не имеет решений. Решение появится лишь тогда (см. рис. 32), когда квадрат окажется вписанным в окружность. В этом случае $a=2$, решений будет четыре. Далее, при $2<a<2\sqrt{2}$ каждая сторона имеет две общие точки с окружностью, а значит, система будет иметь восемь решений. При $a=2\sqrt{2}$ окружность окажется вписанной в квадрат. Следовательно, решений окажется снова четыре. При $a>2\sqrt{2}$ система решений не имеет.

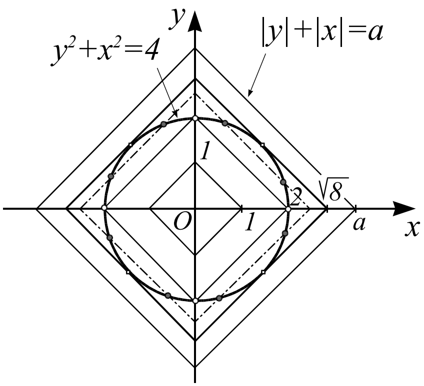


Рис. 32

Ответ. Если $a<2$ или $a>2\sqrt{2}$, то решений нет; если $2<a<2\sqrt{2}$, то восемь решений; если $a=2$ или $a=2\sqrt{2}$, то четыре решения.

Пример 11. *Определить значения параметра a, при которых система неравенств* $\begin{cases} x-a \ge -1, \\ x^2-3x \le a-1 \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Решение. Выполним построения на плоскости Oxa (см. рис. 33).

Преобразуем систему неравенств к виду $\begin{cases} a \le x+1, \\ x^2-3x+1 \le a. \end{cases}$

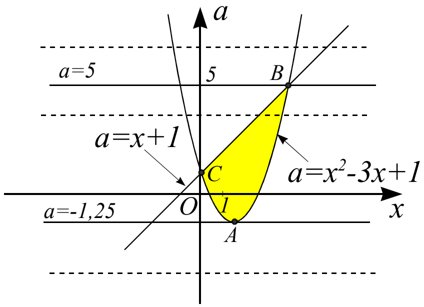


Рис. 33

Решением первого неравенства является множество точек плоскости, лежащих ниже прямой $a = x + 1$ (включая точки прямой), для второго – выше параболы $a = x^2 - 3x + 1$ (включая точки параболы). Система неравенств имеет решения при тех значениях a, при которых прямая $a = const$, параллельная оси Ox, имеет общие точки с заштрихованной областью. Только две прямые вида $a = const$, проходящие через точки A и B, имеют единственную общую точку с этой областью. Значение ординаты точки A равно $-5/4$. Так как B – точка пересечения графиков функций $a = x^2 - 3x + 1$ и $a = x + 1$, то для нахождения ее абсциссы нужно решить уравнение $x + 1 = x^2 - 3x + 1$ или $x^2 - 4x = 0$. Его корнями являются числа $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Точке B соответствует второй корень. Соответственно, ордината точки B равна 5.

При $a < -5/4$ и $a > 5$ система не имеет решений.

Ответ. $a = -5/4$ и $a = 5$.

Пример 12. *Решить систему неравенств в зависимости от значений параметра a:*

$$\begin{cases} x^2 + x \le a, \\ 2x - x^2 \ge a - 1. \end{cases}$$

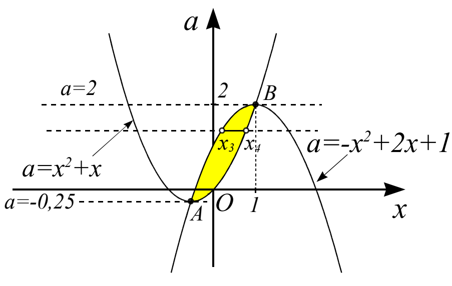


Рис. 34

Решение. Преобразуем исходную систему уравнений к виду

$$\begin{cases} x^2 + x \le a, \\ 2x - x^2 + 1 \ge a. \end{cases}$$

Выполним построения графиков функций $a = x^2 + x$ и $a = -x^2 + 2x + 1$ на плоскости Oxa (см. рис. 34). Координаты точек пересечения построенных графиков найдем из уравнения $x^2+x=2x-x^2+1$. Его корнями являются числа $x_1=-0,5$ и $x_2=1$.

Корень x_1 совпадает с абсциссой вершины первой параболы, x_2 – второй параболы. Система имеет решения при $-0,25\le a\le 2$. Решение системы – есть отрезок $[x_3;x_4]$, где x_3 – меньший из корней уравнения $x^2-2x+a-1=0$, а x_4 – больший из корней уравнения $x^2+x-a=0$.

Ответ. $x\in\left[1-\sqrt{2-a};(-1+\sqrt{1+4a})/2\right]$ при $-0,25\le a\le 2$.

Пример 13. *При каких значениях параметра* a *имеет ровно два различных корня уравнение* $\sqrt{x+2a^2}\cdot(x^2+(2-a)x-2a)=0$?

Решение. Корни данного уравнения должны удовлетворять условию $x\ge -2a^2$ (условие существования квадратного корня из выражения $x+2a^2$). Заметим, что $x^2+(2-a)x-2a=(x-a)(x+2)$. Тогда

$$\sqrt{x+2a^2}\cdot(x-a)(x+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2a^2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2a^2,\\ x=a,\\ x=-2.\end{array}\right.\end{cases}$$

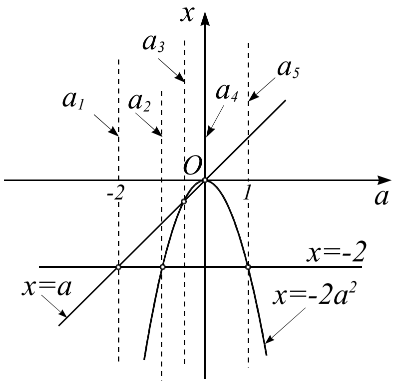


Рис. 35

Следовательно, корнями уравнения могут быть числа $x_1=-2a^2$, $x_2=a$ и $x_3=-2$. По условию задачи требуется найти значения параметра a, при которых уравнение имеет ровно два различных корня. Для отбора искомых значений параметра на плоскости Oxa построим графики функций $x=-2a^2$, $x=a$ и $x=-2$ (см. рис. 35). Каждая прямая $a=const$, параллельная оси Ox, пересекает каждый из построенных графиков, и ордината точки пересечения дает значение корня исходного уравнения при условии, что $x \geq -2a^2$. Имеется пять критических положений этих прямых $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -0,5$, $a_4 = 0$ и $a_5 = 1$. Они проходят через точки пересечения графиков. Точки -2, -1, $-0,5$, 0 и 1 разбивают числовую прямую Oa на шесть промежутков. Рассмотрим каждый из них:

(1) $a \in (-\infty; -2)$ и (2) $a \in (-2; -1)$. На этих промежутках уравнение имеет три корня.

(3) $a \in (-1; -0,5)$. Уравнение имеет два корня (график функции $x = -2$ расположен ниже графика функции $x = -2a^2$).

(4) $a \in (-0,5; 0)$. Уравнение имеет один корень, так как графики функций $x = a$ и $x = -2$ – ниже графика функции $x = -2a^2$.

(5) $a \in (0; 1)$. Уравнение имеет два корня (график функции $x = -2$ – ниже графика функции $x = -2a^2$).

(6) $a \in (1; -\infty)$. Уравнение имеет три корня.

Соответственно при $a_1 = -2$, $a_2 = -1$ и $a_4 = 1$ уравнение имеет два корня (см. рис. 33).

Ответ. $a \in \{-2\} \cup [-1; -0,5) \cup (0; 1]$.

Координатно-параметрический метод (КП – метод)

Данный метод представляет собой некоторое обобщение графического метода решения уравнений и неравенств, основанного на использовании координатной плоскости Oxa. В последнем случае ось Ox называют ***координатной***, ось Oa – ***параметрической***, а плоскость Oxa – ***координатно-параметрической*** (или ***КП – плоскостью***).

При решении конкретной задачи координатно-параметрическим методом в ходе решения плоскость Oxa разбивается на «частичные области», внутри каждой из которых геометрически интерпретируется и решается поставленная задача.

Замечание. В частности, понятие «частичных областей» используется при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестные под знаком абсолютной величины (этот метод называют методом ***«частичных областей»).*** В свою очередь при решении логарифмических и показательных (и некоторых других) уравнений и неравенств также приходится разбивать плоскость Oxa на области.

Применим *КП*-метод для решения следующего уравнения.

Пример 14. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$|x|+2|x-1|=a.$$

Решение. Применяя метод «частичных областей» и определения модуля, заменим уравнение совокупностью трех систем.

$$|x|+2|x-1|=a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} x<0, \\ -x-2x+2=a; \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 0\le x<1, \\ x-2x+2=a; \end{cases} \\ (\mathrm{III})\begin{cases} x\ge 1, \\ x+2x-2=a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} x<0, \\ x=\dfrac{2-a}{3}; \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 0\le x<1, \\ x=2-a; \end{cases} \\ (\mathrm{III})\begin{cases} x\ge 1, \\ x=\dfrac{a+2}{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} a>2, \\ x=\dfrac{2-a}{3}; \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 1<a\le 2, \\ x=2-a; \end{cases} \\ (\mathrm{III})\begin{cases} a\ge 1, \\ x=\dfrac{a+2}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

На *КП* – плоскости (см. рис. 36) решением рассматриваемого уравнения в первой частичной области (I): $x<0$ (полуплоскости) является значения координат точек, лежащих на луче $x=(2-a)/3$; во второй – (II): $0\le x<1$ (полосе) – значения координат точек отрезка прямой $x=2-a$; в третьей – (III): (полуплоскости) – значения координат точек, лежащих на луче $x=(a+2)/3$.

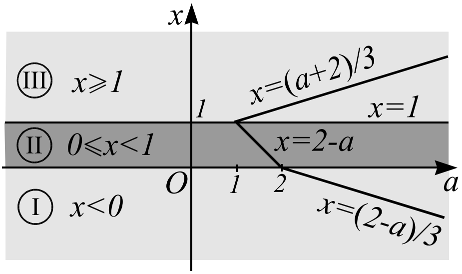


Рис. 36

Поставив в соответствие каждому значению параметра a значение x на полученной линии, запишем ответ.

Ответ. Если $a<1$, то решений нет;
если $1<a\le 2$, то $x_1=(a+2)/3$ и $x_2=2-a$;
если $a>2$, то $x_1=(a+2)/3$ и $x_2=(2-a)/3$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 3.1.1. – 3.1.5. для каждого значения параметра a определите число решений данного уравнения.

3.1.1. а) $x+\frac{|x|}{x}=a$; б) $|x(x-2)|=a$; в) $x+\frac{1}{x}=a$.

3.1.2. а) $x^2+2x-3=a^2-4a$; б) $|x+2|(x-3)=a^2-1$; в) $\sqrt{x+2a}=x$.

3.1.3. а) $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{a-|a|}$; б) $x-\frac{1}{|x|}=a-\frac{1}{a}$; в) $\frac{|x|+1}{x}=a^2+a-1$.

3.1.4. а) $\sqrt{x-2}=ax$; б) $\sqrt{9-x^2}=(a-1)x$; в) $ax^2+4|x|-5=0$.

3.1.5. а) $\sqrt{9-x^2}=a|x|+5$; б) $(x-1)^2=2|x-a|$; в) $ax+\frac{|x|}{x}=2a+1$.

3.1.6. Для каждого значения параметра a решите уравнение.

а) $|x+3|-a|x-1|=4$; б) $a|x+3|+2|x+4|=2$.

3.1.7. При каких значениях a решением неравенства является отрезок длиной d:

а) $|3-4x|\sqrt{x-x^2}\ge(2xa+0,5-a)|3-4x|$, где $d=0,5$;

б) $|9-4x|\sqrt{3x-x^2}\ge(2xa+1,5-3a)|9-4x|$, где $d=1,5$.

3.1.8. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a.$$

В задачах 3.1.9-3.1.11 определите, при каких значениях a система уравнений имеет указанное число решений m.

3.1.9. а) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y=a;\end{cases}$ $m=1$; б) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y-|x|=a;\end{cases}$ $m=2$;

в) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y+|x|=a;\end{cases}$ $m=4$; г) $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ |x|+|y|=a\end{cases}$ имеет решение.

3.1.10. а) $\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ 2|x|+|y|=4;\end{cases}$ $m=8$; б) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ \big||x|-|y|\big|=a;\end{cases}$ $m=8$.

3.1.11. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \\ y - |x-2| = a; \end{cases}$ $m = 4$.

3.1.12. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y + a = ax^2, \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений? Сколько решений в этом случае имеет система?

3.1.13. При каких значениях параметра a имеет ровно два различных корня уравнение:

а) $\sqrt{16x - 9a^2} \cdot (x^2 + (a-2)x - 2a) = 0$;

б) $\sqrt{x - 6a^3} \cdot (x^2 + (1-2a)x - 2a) = 0$.

3.1.14. Определите, при каких значениях параметра a система неравенств:

а) $\begin{cases} (a-1)x \ge 0, \\ x + 5 \le 0 \end{cases}$ имеет решение; б) $\begin{cases} x^2 + x < (a-x)^2, \\ x^2 + x \ge 0, \\ a - x > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

3.1.15. Определите, при каких значениях параметра a имеет единственное решение система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a \le 0, \\ x^2 - 4x + a \le 0. \end{cases}$$

3.1.16. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 4 + a \le 0, \\ x^2 + x - 4 - a \ge 0. \end{cases}$$

3.1.17. Определите, при каких значениях параметра a имеет ровно два решения система неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2ay - a^2 + 1, \\ y - a \le |x|. \end{cases}$

ГЛАВА IV. Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр

§ 4.1. Основные понятия и определения

Уравнения

Два уравнения $f_1(x,a)=g_1(x,a)$ и $f_2(x,a)=g_2(x,a)$ называются ***равносильными*** (***эквивалентными***), если они имеют одно и то же множество решений. В этом случае пишут

$$f_1(x,a)=g_1(x,a)\Leftrightarrow f_2(x,a)=g_2(x,a).$$

Если же все корни уравнения $f_1(x,a)=g_1(x,a)$ являются корнями $f_2(x,a)=g_2(x,a)$ (при этом ОДЗ уравнений могут не совпадать), то второе уравнение называют ***следствием*** первого. В этом случае пишут

$$f_1(x,a)=g_1(x,a)\Rightarrow\ f_2(x,a)=g_2(x,a).$$

Уравнения равносильны на некотором множестве значений переменной x, если они имеют одни и те же решения, принадлежащие этому множеству.

При решении уравнений в основном используют два способа. В первом случае, выполняя некоторые преобразования, осуществляют переход от исходного уравнения к равносильному до тех пор, пока уравнение не примет простой вид. Второй способ состоит в замене исходного уравнения его следствием (такое преобразование может быть проделано несколько раз). Так как при этом возможно приобретение посторонних корней, то при этом способе решения на последнем этапе необходимо выполнить проверку полученных решений. Это не сложно сделать в случае уравнений без параметра, однако при наличии параметра проверка становится иногда очень сложной. В этом случае равносильность достигается благодаря использованию условий, определяющих ОДЗ: *исходное уравнение заменяют равносильной системой, состоящей из вновь полученного уравнения и условий, определяющих ОДЗ.* Этот прием позволяет сразу отсечь лишние корни.

К общим методам решения уравнений всех типов (рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических) можно отнести следующие: разложение на множители; замена переменной; использование свойств ограниченности или монотонности функций; графический метод.

Пример 1. *При каких значениях параметра* a *уравнения* $x^2 = a$ (1) *и* $\sqrt{x} = a$ (2) *равносильны?*

Решение. При значениях параметра $a < 0$ оба уравнения не имеют решений. Так как множество решений каждого уравнения в этом случае представляет пустое множество, то уравнения равносильны.

При $a = 0$ оба уравнения имеют решение $x = 0$. Следовательно, в этом случае уравнения также равносильны.

При значениях параметра $a > 0$ уравнение (1) имеет два корня $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$, а уравнение (2) имеет один корень $x = a^2$. Следовательно, в этом случае уравнения не равносильны.

Ответ. $a \le 0$.

Пример 2. *Даны уравнения*

$$(\sqrt{x} - a)(x + a) = 0 \ (1) \quad \text{и} \quad \frac{(x^2 - a^2)(x - a^2)}{x - 2a + 4} = 0 \ (2).$$

Определите, при каких значениях параметра a *:*

а) *уравнение* (2) *является следствием уравнения* (1);

б) *уравнения* (1) *и* (2) *равносильны*.

Решение. Решим уравнение (1).

$$(\sqrt{x} - a)(x + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - a = 0, \\ x + a = 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = a, \\ x = -a. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $a \le 0$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = a, \\ x = -a; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = a$; при $a > 0$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = a, \\ x = -a; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = a^2$.

Решим уравнение (2).

$$\frac{(x^2 - a^2)(x - a^2)}{x - 2a + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 2a - 4, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - a^2 = 0, \\ x - a^2 = 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 2a - 4, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = |a|, \\ x_2 = -|a|, \\ x_3 = a^2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Найдем значения параметра a, при которых какой-нибудь из корней x_1, x_2, x_3 равен $2a-4$. Рассмотрим три случая:

1) $2a-4=x_1$. При $a \geq 0$ получаем $2a-4=|a| \Leftrightarrow a=4$, при $a<0$ уравнение $2a-4=|a|$ решений не имеет.

2) $2a-4=x_2$. При $a \geq 0$ получаем $2a-4=-|a| \Leftrightarrow a=4/3$, при $a<0$ уравнение $2a-4=-|a|$ решений не имеет.

3) $2a-4=x_3$. Уравнение $2a-4=a^2$ не имеет решений.

Окончательно уравнение (2) имеет следующие корни: если $a=4/3$, то $x_1=4/3,\ x_2=16/9$; если $a=4$, то $x_1=-4,\ x_2=16$; если $a \in (-\infty;4/3) \cup (4/3;4) \cup (4;\infty)$, то $x_1=|a|,\ x_2=-|a|,\ x_3=a^2$.

При $a \leq 0$ корень уравнения (1) $x=a$ совпадает с корнем $x_2=-|a|$ уравнения (2).

При $a>0$ корень уравнения (2) $x=a^2$ является корнем уравнения (2).

Корни уравнений (1) и (2) совпадают только при $a=0$ и равны 0.

Ответ. а) При $a \in \mathbb{R}$ уравнение (2) является следствием уравнения (1); б) при $a=0$ уравнения (1) и (2) равносильны.

Неравенства

Два неравенства $f_1(x,a)<g_1(x,a)$ и $f_2(x,a)<g_2(x,a)$ (или $f_1(x,a) \leq g_1(x,a)$ и $f_2(x,a) \leq g_2(x,a)$) называются ***равносильными*** на множестве X, если множества их решений, принадлежащие X, совпадают. В этом случае пишут

$$f_1(x,a)<g_1(x,a) \Leftrightarrow f_2(x,a)<g_2(x,a).$$

Если же все решения неравенства $f_1(x,a)<g_1(x,a)$ являются решениями неравенства $f_2(x,a)<g_2(x,a)$, то второе неравенство называют его ***следствием***. В этом случае пишут

$$f_1(x,a)<g_1(x,a) \Rightarrow f_2(x,a)<g_2(x,a).$$

Если в процессе решения совершают переход от исходного неравенства к его следствию, то в конце решения необходимо провести исследование, позволяющее из полученного множества значений аргумента отобрать те, которые являются решениями исходного. При решении неравенств с параметрами следует обращать внимание на то, что формальное решение неравенств, т.е. решение, при котором левые и правые части неравенства делятся на выражение, содержащее параметр, может привести к потере решений. Необходимо следить за знаком выражения, на которое делятся обе части неравенства, так как на него может влиять значение параметра.

Метод интервалов

При решении неравенств с параметрами используется метод, основанный на следующем свойстве функций: ***если функция непрерывна на промежутке*** $(x_1;x_2)$ ***и между точками*** x_1 ***и*** x_2 ***она не имеет корней, то на промежутке*** $(x_1;x_2)$ ***функция сохраняет знак.***

Для нахождения участков знакопостоянства на числовой оси отмечают все точки, в которых функция $f(x,a)$ обращается в нуль либо терпит разрыв. Эти точки разбивают числовую прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых $f(x,a)$ непрерывна и не обращается в нуль, а значит, сохраняет знак. На каждом из промежутков определяют знак функции.

Замечание. В данном случае отличие от метода интервалов для неравенств без параметра состоит в том, что в рассматриваемом случае значения абсцисс точек, в которых функция $f(x,a)$ обращается в нуль либо терпит разрыв, сами являются функциями, зависящими от параметра, и нанесение их на числовую ось требует дополнительных логических рассуждений об их взаимном расположении на оси.

Пример 3. *Решить неравенство* $\dfrac{x-a}{x-2a} \geq 0$.

Решение. Рассмотрим точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль. Это точки $x_1 = a$ и $x_2 = 2a$. Видим, что при $a > 0$ точка $x_1 = a$ расположена левее точки $x_2 = 2a$, при $a < 0$ – наоборот, а в случае $a = 0$ они совпадают.

Замечание. В неравенствах, не содержащих параметра, для определения знака функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке бывает достаточно определить знак функции в какой-либо его внутренней точке. В неравенствах с параметром это не всегда можно сделать, поскольку сами границы промежутка не имеют конкретных числовых значений.

Поэтому рекомендуется пользоваться «***кривой знаков***» (иногда говорят «***змейкой знаков***») – кривой, расположенной выше оси Ox, если значения $f(x,a)$ положительны и ниже, если – отрицательны.

Рационально использовать «кривую знаков» в случае, когда входящая в неравенство функция $f(x,a)$ может быть представлена как произведение (или частное) линейных или квадратичных множителей. Используя «кривую знаков», для каждого множителя легко установить знак $f(x,a)$ в любом промежутке, поскольку каждый из множителей в данном промежутке сохраняет знак. Значение $f(x,a)$ будет положительно, если количество отрицательных множителей будет четно.

«Кривая знаков» для соответствующих линейных множителей выглядит следующим образом:

для множителя $x - x_0$ (см. рис. 37а); для $x_0 - x$ (см. рис. 37б).

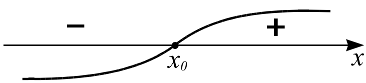


Рис. 37а

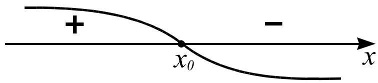


Рис. 37б

«Кривая знаков» для соответствующих квадратичных множителей $ax^2 + bx + c$ выглядит следующим образом:

при $a > 0, D > 0$ (см. рис. 38а); при $a < 0, D > 0$ (см. рис. 38б).

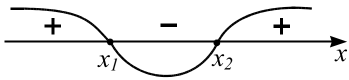


Рис. 38а

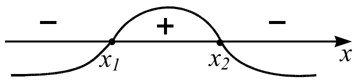


Рис. 38б

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Для заданного неравенства $\dfrac{x-a}{x-2a} \ge 0$ получаем:

В случае $a > 0$ (см. рис. 39а). В случае $a < 0$ (см. рис. 39б).

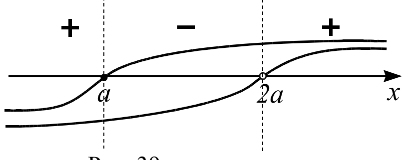


Рис. 39а

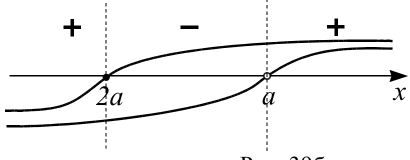


Рис. 39б

В случае $a = 0$ неравенство справедливо при любом $x \neq 0$.

Ответ. Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; 2a) \cup [a; +\infty)$;

если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

если $a > 0$, то $x \in (-\infty; a] \cup (2a; +\infty)$;.

Замечание. При решении неравенств с параметрами могут быть использованы также **метод замены переменной** и **графический метод**.

Пример 4. *Даны неравенства* $x^2 > a$ (1) *и* $\dfrac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} > 0$ (2). *При каких значениях параметра* a *они равносильны*?

Решение. При значениях параметра $a < 0$ неравенство (1) имеет решение $x \in \mathbb{R}$, а неравенство (2) не имеет смысла.

При $a = 0$ оба неравенства имеют решение $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Следовательно, в этом случае неравенства равносильны.

При значениях параметра $a > 0$ решение неравенства (1) имеет вид $x \in (-\infty; -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}; +\infty)$ и совпадает с решением неравенства (2). Следовательно, в этом случае неравенства равносильны.

Ответ. $a \geq 0$.

Пример 5. *Даны неравенства* $3x > 3 - a$ (1) и $2x + 1 - 3a > 0$ (2). *Определите, при каких значениях параметра* a:

а) *неравенства* (1) *и* (2) *будут равносильны*;

б) *неравенство* (2) *является следствием* (1).

Решение. Преобразуем неравенства к виду $x > 1 - \dfrac{a}{3}$ (1) и $x > \dfrac{1 - 3a}{2}$ (2). Неравенства будут равносильны, если совпадут их множества решений. Это возможно, если $1 - \dfrac{a}{3} = \dfrac{1 - 3a}{2}$ или $2 - 2a = 3 - 9a$. Откуда $a = 1/7$.

Соответственно, неравенство (2) является следствием (1) при выполнении условия $\dfrac{1 - 3a}{2} > 1 - \dfrac{a}{3}$ или $3 - 9a > 2 - 2a$, т.е. при $a < 1/7$.

Ответ. а) $a = 1/7$; б) $a < 1/7$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1.1. Определите значения параметра a, при которых данные уравнения равносильны:

а) $ax - a = x - 2$ и $ax - a = x + 2$;

б) $2ax - 2a = x + 4$ и $2ax - 2a = x - 5$.

4.1.2. Определите значения параметра a, при которых данные неравенства равносильны:

а) $4a - ax \geq x - 2$ и $ax - a \leq x + 2$;

б) $2ax - 2a > x + 4$ и $2ax + 2a > x - 8$.

4.1.3. Определите значения параметра a, при которых второе неравенство является следствием первого:

а) $x^2 + 3a^2 - 1 \leq 2a(2x - 1)$ (1) и $x^2 - (a+1)x + a > 0$ (2);

б) $1 \leq x \leq 2$ (1) и $\dfrac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$ (2).

4.1.4. При каких значениях a из неравенства

а) $x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$;

б) $x^2 - x - 2 < 0$ следует неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$?

4.1.5. Определите значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = -\pi, \\ x^2 + y^2 + 4y = a \end{cases}$ и $\begin{cases} \cos(x + y) = -1, \\ x^2 + y^2 + 4y = a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x = a \end{cases}$ и $\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ x^2 + y^2 - 4x = a. \end{cases}$

4.1.6. Определите значения параметров a и b, при которых равносильны системы уравнений:

$\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$

§ 4.2. Рациональные уравнения

Пример 1. *При каких значениях параметра* a *не имеет решений уравнение*

$$\frac{x-a}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}\,?$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $x \neq 2$ и $x \neq -2$.

На ОДЗ преобразуем исходное уравнение к виду $(x-a)(x+2)-x(x-2)=1$ или $(4-a)x=2a+1$. При $a=4$ получается уравнение $0 \cdot x = 9$, которое не имеет решений. При $a \neq 4$ получим формальный корень: $x=\frac{2a+1}{4-a}$. Найдем значения параметра a, при которых этот корень принимает значения 2 и -2. Имеем: 1) $\frac{2a+1}{4-a}=2$, откуда $a=\frac{7}{4}$; 2) $\frac{2a+1}{4-a}=-2$ – решений нет.

Ответ. При $a=4$ и $a=7/4$.

Пример 2. *Решить уравнение* $\frac{ax+6-x}{x^2-9}=0$.

Решение. ОДЗ уравнения $x \neq 3$ и $x \neq -3$. Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и отличен от нуля. Решим уравнение $ax+6-x=0$ или $(a-1)x=-6$. Если $a=1$, то решений нет. При $a \neq 1$ получаем $x=-\frac{6}{a-1}$. Учитывая ОДЗ, получаем $-\frac{6}{a-1} \neq -3$ (отсюда следует $a \neq 3$) и $-\frac{6}{a-1} \neq 3$ ($a \neq -1$).

Ответ. Если $a=-1$, $a=1$ и $a=3$, то решений нет;

$x=-\frac{6}{a-1}$ при всех других значениях a.

Пример 3. *Решить уравнение* $\frac{x^2+1}{xa^2-2a}-\frac{1}{2-ax}=\frac{x}{a}$.

Решение. ОДЗ уравнения $a \neq 0$ и $x \neq 2/a$. Преобразуем данное уравнение $\frac{x^2+1}{xa^2-2a}-\frac{1}{2-ax}-\frac{x}{a}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1+a-ax^2+2x}{xa^2-2a}=0$.

На ОДЗ достаточно решить уравнение $(1-a)x^2+2x+(1+a)=0$. При $a=1$ уравнение является линейным и имеет решение $x=-1$. При $a\neq 1$ уравнение является квадратным и имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=\dfrac{a+1}{a-1}$. Проверим выполнение условия $x\neq 2/a$.

Для первого корня $x_1=-1\neq 2/a \Leftrightarrow a\neq -2$; при $a=-2$ уравнение имеет один корень $x=1/3$.

Для второго корня $x_2=\dfrac{a+1}{a-1}\neq\dfrac{2}{a}$. Легко убедиться, что уравнение $\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2}{a}$ не имеет корней.

Ответ. Если $a=0$, то решений нет;
если $a=-2$, то $x=1/3$; если $a=1$, то $x=-1$;
если $a\neq 0$, $a\neq 1$ и $a\neq -2$, то $x_1=-1$ и $x_2=\dfrac{a+1}{a-1}$.

Пример 4. *Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение $(x^2+6-ab)^2+(x-a-b+9)^2+x^2+4x+4=0$ имеет хотя бы одно решение.*

Решение. Левая часть уравнения – сумма квадратов, следовательно, равенство нулю возможно только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Из уравнения $x^2+4x+4=0$ следует $x=-2$. Подставляя в уравнение значение $x=-2$, получаем, что равенство левой части уравнения нулю возможно только при одновременном выполнении условий

$$\begin{cases} ab=10, \\ a+b=7. \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет две пары решений $(a;b)$. Это пары (2;5) и (5;2).

Ответ. (2;5), (5;2).

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a решите уравнение:

4.2.1. а) $\dfrac{x(x-a)}{x+3}=0$; б) $\dfrac{x(x-5)}{x+a}=0$;

в) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x+a}=0$; г) $\dfrac{(x+a)(x-a)}{x+3}=0$.

4.2.2. а) $\dfrac{(x-a+1)(x-2a-3)}{x+a}=0$; б) $\dfrac{(x-a)(x+3-a)}{x+2a+1}=0$.

4.2.3. а) $\dfrac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-4}=0$; б) $\dfrac{24-5x-x^2}{x^2+(2a-5)x-10a}=0$.

4.2.4. а) $\dfrac{2ax+3}{5x-4a}=4$; б) $\dfrac{3ax-1}{3x-2a}=3$; в) $\dfrac{3a-x}{ax-2}=2$.

4.2.5. а) $\dfrac{a^2-2x}{x+a}=\dfrac{x+a}{a-x}$; б) $\dfrac{a-x}{ax^2}=\dfrac{1}{(1-a)x}+\dfrac{1}{a(a-1)}$.

4.2.6. Определите значения параметра a, при которых имеет ровно три различных корня уравнение:

а) $2x^3+x=a(4x^3-x)$; б) $x^4-x^2=(a+1)(x^4+x^2)$.

4.2.7. Решите уравнение:

а) $(x-a)x(x+a)(x+2a)=3a^4$;

б) $(x^3-2x)-(x^2+2)a-2a^2x=0$;

в) $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$.

§ 4.3. Рациональные неравенства

Пример 1. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\geq 1$.

Решение. Найдем ОДЗ неравенства: $x\neq 0$ и $a\neq 0$. Преобразуем его к виду $\frac{a+x-ax}{ax}\geq 0$ или $\frac{a+(1-a)x}{ax}\geq 0$. При $a\neq 1$ преобразуем неравенство к виду $\frac{1-a}{a}\cdot\frac{x+\frac{a}{1-a}}{x}\geq 0$ (*).

Рассмотрим два случая:

(1) $\frac{1-a}{a}>0$, т.е. $a\in(0;1)$, и (2) $\frac{1-a}{a}<0$, т.е. $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

(1) Если $a\in(0;1)$, то неравенство (*) справедливо, если $\frac{x+\frac{a}{1-a}}{x}\geq 0$, т.е. (см. рис. 40а) при $x\in\left(-\infty;a/(a-1)\right]\cup(0;+\infty)$.

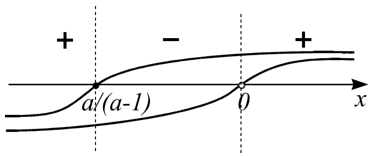


Рис. 40а

(2) Если $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, и неравенство (*) справедливо, если $\frac{x+\frac{a}{1-a}}{x}\leq 0$, т.е. (см. рис. 40б) при $x\in\left(0;\,a/(a-1)\right]$.

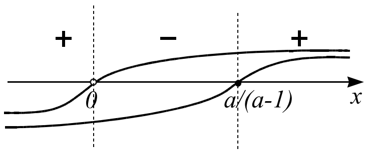


Рис. 40б

При $a=1$ исходное неравенство имеет вид $\frac{1}{x}\geq 0$ и выполняется при $x>0$.

Ответ. Если $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, то $x\in\left(0;\,a/(a-1)\right]$;

если $a\in(0;1)$, то $x\in\left(-\infty;a/(a-1)\right]\cup(0;+\infty)$;

если $a=1$, то $x\in(0;+\infty)$.

Пример 2. *Для каждого значения параметра a решить неравенство* $x^2 - 2ax \ge x - 9$.

Решение. Перенося все члены в левую часть, получаем неравенство $x^2 - (2a+1)x + 9 \ge 0$. Его дискриминант $D = 4a^2 + 4a - 35$. Если $D \le 0$, то неравенство справедливо при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Из неравенства $4a^2 + 4a - 35 \le 0$ следует $-3{,}5 \le a \le 2{,}5$.

Если $D > 0$, то решением исходного неравенства являются

$$x \in \left(-\infty; \frac{2a+1-\sqrt{D}}{2} \right) \cup \left(\frac{2a+1+\sqrt{D}}{2}; +\infty \right),\ D = 4a^2 + 4a - 35 .$$

Ответ. Если $a \in (-\infty; -3{,}5) \cup (2{,}5; \infty)$, то

$x \in \left(-\infty; (2a+1-\sqrt{D})/2 \right) \cup \left((2a+1+\sqrt{D})/2; +\infty \right)$;

если $a \in [-3{,}5; 2{,}5]$, то $x \in \mathbb{R}$.

Пример 3. *Для каждого значения параметра a решить неравенство* $\dfrac{1}{x-a} \le x$.

Решение. Находим ОДЗ: $x \ne a$.

Перенося все члены в левую часть, получим

$$\frac{1}{x-a} - x \le 0 \text{ или } \frac{1+ax-x^2}{x-a} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-ax-1}{x-a} \ge 0 .$$

Разложив числитель на множители, приходим к неравенству

$$\frac{\left(x - (a-\sqrt{a^2+4})/2 \right)\left(x - (a+\sqrt{a^2+4})/2 \right)}{x-a} \ge 0 .$$

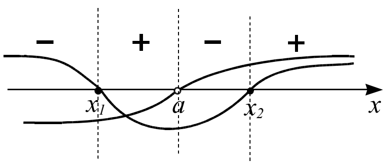


Рис. 41

Решим его, используя метод «кривых знаков», с учетом того, что при всех значениях a справедливо неравенство

$$\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} \le a \le \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

На рис. 41 изображены кривые знаков $x^2 - ax - 1$ и $x - a$, где $x_1 = (a - \sqrt{a^2+4})/2$, $x_2 = (a + \sqrt{a^2+4})/2$.

Ответ. $x \in \left[(a-\sqrt{a^2+4})/2; a \right) \cup \left[(a+\sqrt{a^2+4})/2; +\infty \right)$ при $a \in \mathbb{R}$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра a решить неравенство* $\dfrac{x-1}{2x-a} > 1$.

Решение. $\dfrac{x-1}{2x-a} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-(a-1)}{x-a/2} < 0$ (**), где $x \neq a/2$. Решим неравенство (**) методом «кривых знаков». Выясним расположение на числовой оси Ox чисел $a-1$ и $a/2$, так неравенство $a-1 < a/2$ справедливо при $a < 2$ и $a-1 > a/2$ при $a > 2$.

При $a < 2$ (см. рис. 42а).

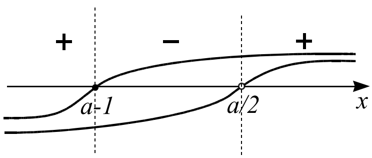


Рис. 42а

При $a > 2$ (см. рис. 42б).

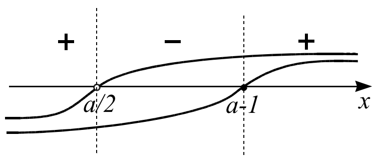


Рис. 42б

При $a = 2$ неравенство не имеет решений, так как $\dfrac{x-(2-1)}{x-2/2} = 1$.

Ответ. Если $a < 2$, то $x \in (a-1; a/2)$; если $a = 2$, то решений нет; если $a > 2$, то $x \in (a/2; a-1)$.

Пример 5. *Определить, при каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение система неравенств* $\begin{cases} ax-1 \le 0, \\ x-4a \ge 0. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся графическим методом. Заштрихуем на плоскости Oxa множество точек (см. рис. 43), координаты $(x; a)$ которых удовлетворяют системе

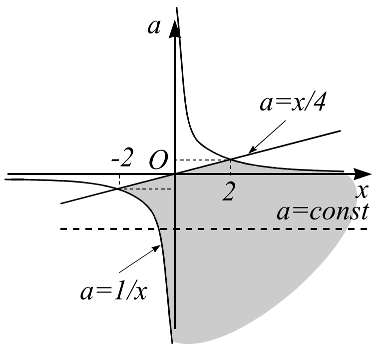


Рис. 43

неравенств.

Неравенству $ax-1\le 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих выше гиперболы $a=1/x$ при $x<0$, и ниже – при $x>0$. Неравенство $x-4a\ge 0$ выполняется для точек, лежащих ниже прямой $a=x/4$.

Данная система имеет решение, если прямая $a=const$ пересекает заштрихованную область (см. рис. 43), т.е. при $a\le 0,5$.

Ответ. $a\le 0,5$.

Пример 6. *Определить, при каких значениях параметра* a *имеет решение система неравенств*

$$\begin{cases} x^2+2x+a\le 0, \\ x^2-4x-6a\le 0. \end{cases}$$

Решение. Решим задачу, используя графический метод. Выразим a в каждом неравенстве системы

$$\begin{cases} -x^2-2x\ge a, \\ \dfrac{x^2-4x}{6}\le a. \end{cases}$$

Построим на плоскости Oxa (см. рис. 44) параболы $a=-x^2-2x$ и $a=(x^2-4x)/6$. Абсциссы точек пересечения парабол найдем из уравнения $-x^2-2x=\dfrac{x^2-4x}{6}$. Его корни $x_1=0$ и $x_2=-8/7$. Абсцисса вершины параболы $a=-x^2-2x$ равна -1, ордината равна $a_{в1}=1$.

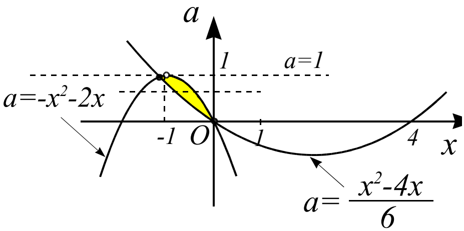


Рис. 44

Следовательно, ордината точки пересечения парабол $a(-8/7)=48/49$ лежит ниже указанной вершины. Ордината второй точки пересечения $a_{в2}=0$. Системе неравенств удовлетворяют координаты точек, лежащих в заштрихованной области на плоскости Oxa, т.е. исходная система неравенств имеет решение для любого $a\in[0;1]$.

Ответ. $a\in[0;1]$.

Пример 7. *Найти все значения параметра* a *, при которых неравенство* $\dfrac{a+4-x}{x+3a} \ge 0$ (*) *выполняется для всех* x *из промежутка* $3 \le x \le 5$.

Решение. Решим задачу двумя способами.

Способ 1 (*метод «кривых знаков»*). Найдем решение неравенства (*). При значении $x_1 = a+4$ числитель равен нулю, а при $x_2 = -3a$ – знаменатель. Возможны три варианта расположения на числовой оси Ox чисел x_1 и x_2:

(1) $x_1 > x_2$ при $a > -1$; (2) $x_1 = x_2$ при $a = -1$; (3) $x_1 < x_2$ при $a < -1$.

Используя «кривые знаков» числителя и знаменателя, запишем решение неравенства: (1) если $a > -1$, то $-3a < x \le a+4$ (см. рис. 45а);

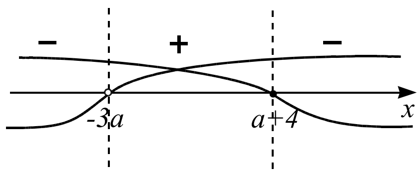


Рис. 45а

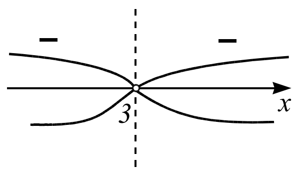


Рис. 45б

(2) если $a = -1$, то решений нет (см. рис. 45б);

(3) если $a < -1$, то $a+4 \le x < -3a$ (см. рис. 45в).

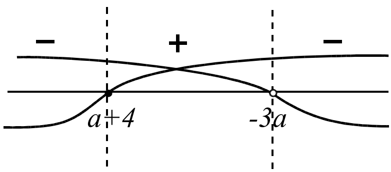


Рис. 45в

Соответственно, условию задачи удовлетворяют такие значения параметра a, при которых все значения x из множества $[3;5]$ являются решением неравенства (*). Это возможно, если при $a > -1$ одновременно выполняются условия $-3a < 3$ и $5 \le a+4$, т.е. $a \ge 1$; а при

$a < -1$ одновременно выполняются условия $a+4 \le 3$ и $5 < -3a$, т.е. $a < -5/3$.

Ответ. $a \in (-\infty; -5/3) \cup [1; +\infty)$.

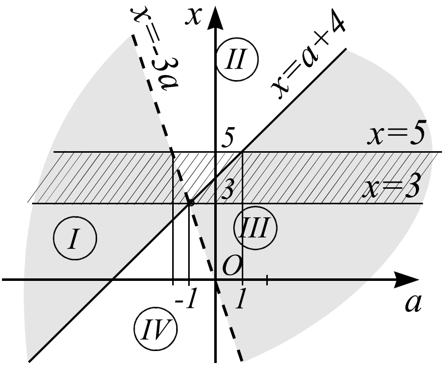


Рис. 46

Способ 2 (*КП-метод*). На КП-плоскости числитель обращается в ноль на прямой $x = a + 4$, а знаменатель – на прямой $x = -3a$. Эти прямые пересекаются в точке с координатами $(-1;3)$ и разбивают КП-плоскость на четыре частичные области I-IV (см. рис. 46). В каждой из них выражение с двумя переменными $F(x,a) = \dfrac{a+4-x}{x+3a}$ сохраняет знак и меняет его при переходе через границы областей. Для установления знаков в каждой из областей возьмем, например, точку из области I с координатами $(-5;0)$. Тогда $F(0,-5) = -1/15 > 0$. Следовательно, выражение $F(x,a)$: неотрицательно в I и III областях, не имеет смысла на прямой $x = -3a$ и обращается в ноль на прямой $x = a + 4$.

Рассмотрим множество точек принадлежащих пересечению полосы $3 \le x \le 5$ с областями I и III. Неравенство $\dfrac{a+4-x}{x+3a} \ge 0$ будет выполняться (см. рис. 45) для всех x, удовлетворяющих неравенству $3 \le x \le 5$, при $a < -5/3$ (значение $-5/3$ – абсцисса точки пересения прямых $x = -3a$ и $x = 5$) и $a \ge 1$ (значение 1 – абсцисса точки пересения прямых $x = a + 4$ и $x = 5$).

Ответ. $a \in (-\infty; -5/3) \cup [1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a решите неравенство:

4.3.1. а) $\dfrac{x-2a}{x-1}>0$; б) $\dfrac{x+3}{x-2a}<0$; в) $\dfrac{x-2a}{x-2}\ge 0$; г) $\dfrac{2x+1}{a-2x}\le 0$.

4.3.2. а) $\dfrac{a}{x-1}>1$; б) $\dfrac{a}{x+1}\ge -1$.

4.3.3. а) $\dfrac{(x-1)(x-a)}{x+3}>0$; б) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-a}<0$; в) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{a-x}>0$.

4.3.4. а) $\dfrac{x(x-a)}{x+3}\le 0$; б) $\dfrac{x(x-5)}{x+a}\ge 0$; в) $\dfrac{(x-2)(x-a)}{x}\le 0$.

4.3.5. а) $\dfrac{(x-a)(x+3)}{x+a}\le 0$; б) $\dfrac{(x-a)(x-2a)}{x+3}\ge 0$; в) $\dfrac{(x+1)(x-4a)}{x+2a+1}\le 0$.

4.3.6. а) $\dfrac{2x-a}{x-2a}>1$; б) $\dfrac{x+a}{x-2a+1}\ge -1$.

4.3.7. а) $\dfrac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-4}\ge 0$; б) $\dfrac{24-5x-x^2}{x^2+(2a-5)x-10a}\le 0$.

4.3.8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

а) $\dfrac{x-3a-1}{x+2a-2}\le 0$ выполняется для всех x из промежутка $2\le x\le 3$;

б) $\dfrac{x-3a-2}{x-2a-1}\le 0$ выполняется для всех x из промежутка $3\le x\le 4$.

Для каждого значения параметра a решите неравенство:

4.3.9. а) $\dfrac{2ax+3}{5x-4a}<4$; б) $\dfrac{3ax-1}{3x-2a}<3$; в) $\dfrac{3a-x}{ax-2}\ge 2$.

4.3.10. а) $2ax^4+8x^3+(a+2a^3)x^2+4x+a^3>0$;

б) $ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0$.

§4.4. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины

Решение уравнения $|f(x,a)|=g(x,a)$ сводится к решению совокупности двух систем следующего вида.

В первом случае при переходе использовано определение модуля.

$$|f(x,a)|=g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x,a)=g(x,a),\\ f(x,a)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-f(x,a)=g(x,a),\\ f(x,a)<0;\end{cases}\end{array}\right. \tag{4.1}$$

Во втором – используется неотрицательность абсолютной величины.

$$|f(x,a)|=g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x,a)=g(x,a),\\ g(x,a)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-f(x,a)=g(x,a),\\ g(x,a)\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \tag{4.2}$$

Для решения уравнений вида

$$|f_1(x,a)|+\ldots+|f_k(x,a)|-|f_{k+1}(x,a)|-\ldots-|f_n(x,a)|=g(x,a)$$

применяют ***метод «частичных областей»*** или ***метод интервалов***.

Основная идея метода «частичных областей» состоит в том, что решение задачи в исходной области (в частности, на плоскости Oxa) сводится к решению совокупности смешанных систем (уравнений и неравенств), не содержащих знаков абсолютной величины, в каждой частичной области, на которые разбивается исходная область.

Основная идея метода интервалов состоит в том, что область определения уравнения (в частности, числовая прямая Ox) разбивается на интервалы. Для этого находят ОДЗ данного уравнения, определяют точки разрыва функций $f_1(x,a),\ldots,f_n(x,a)$ и корни совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}f_1(x,a)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x,a)=0.\end{array}\right.$ В каждом из промежутков, на которые найденные точки разбивают ОДЗ, функции, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. Поэтому исходное уравнение в каждом промежутке заменяется уравнением, не содержащим знаков абсолютной величины и равносильным первоначальному.

Пример 1. *Для каждого действительного значения параметра* a *решить уравнение* $|x|+|a|=1$.

Решение. На плоскости Oxa (см. рис. 47) построим график уравнения $|x|+|a|=1$. Расрывая модули, получаем $|x|+|a|-1=$

$$=\left[\begin{array}{l} x+a-1, \text{если } x\ge 0 \text{ и } a\ge 0,\\ -x+a-1, \text{если } x<0 \text{ и } a\ge 0,\\ x-a-1, \text{если } x\ge 0 \text{ и } a<0,\\ -x-a-1, \text{если } x<0 \text{ и } a<0.\end{array}\right.$$

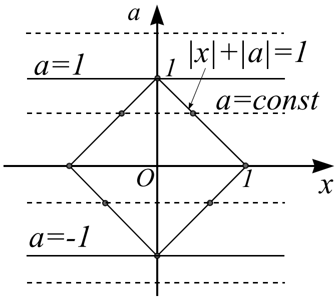


Рис. 47

Ответ. Если $a<-1$ или $a>1$, то решений нет; если $a=-1$ или $a=1$, то одно решение $x=0$; если $-1<a<0$, то – два $x_1=a+1$ и $x_2=-a-1$; если $0\le a<1$, то – два $x_1=1-a$ и $x_2=a-1$.

Пример 2. *При каких значениях* a *имеет хотя бы одно решение уравнение:* а) $|x-1|+|2x-3|=a$;

б) $|x+1|-|x-1|=a$; в) $|x+1|+|x-a|=3$?

Решение. а) На плоскости Oxy (см. рис. 48) построим график функции $f(x)=|x-1|+|2x-3|$. Раскрывая модули, получаем

$$|x-1|+|2x-3|=$$

$$=\left[\begin{array}{l} -3x+4, \text{если } x<1,\\ -x+2, \text{если } 1\le x<1{,}5,\\ 3x-4, \text{если } x\ge 1{,}5.\end{array}\right.$$

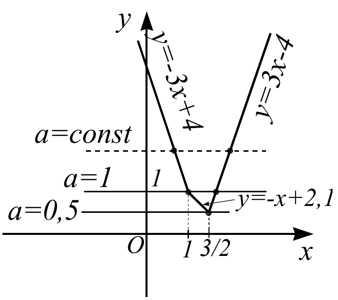


Рис. 48

Следовательно, множество значений функции $f(x)$ есть $E_f=[0{,}5;+\infty)$. Уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение, если $a\in E_f$, т.е. при $a\ge 0{,}5$.

Ответ. При $a \geq 0,5$.

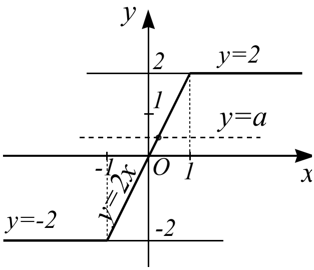


Рис. 49

б) **Решение.** На плоскости Oxy (см. рис. 49) построим график функции $f(x) = |x+1| - |x-1|$:

$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{ если } x < -1, \\ 2x, \text{ если } -1 \leq x < 1, \\ 2, \text{ если } x \geq 1. \end{cases}$$

$E_f = [-2; 2]$. Соответственно, уравнение будет иметь хотя бы одно решение при $-2 \leq a \leq 2$.

Ответ. При $-2 \leq a \leq 2$.

в) **Решение.** Данное уравнение равносильно $|x+1| - 3 = -|x-a|$.

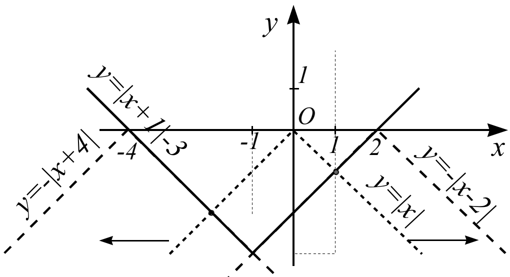


Рис. 50

Воспользуемся методом графической интерпретации. Построим график функции $y = |x+1| - 3$ (см. рис. 50). Функция вида $\varphi(x,a) = -|x-a|$ задает семейство графиков, получающихся из графика функции $y = -|x|$ сдвигом на a единиц вдоль оси Ox. Уравнение имеет решения при $-4 \leq a \leq 2$.

Ответ. $-4 \leq a \leq 2$.

Пример 4. *При каких значениях параметра a уравнение $|2x+4| = ax+1$ имеет единственное решение?*

Решение. Число решений уравнения равно количеству точек пересечения графиков $y = |2x+4|$ и $y = ax+1$. Первый график «неподвижен» (см. рис. 51), а $\varphi(x,a) = ax+1$ задает

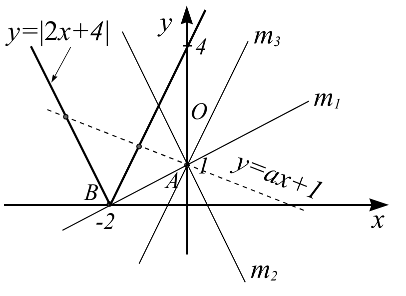


Рис. 51

семейство прямых, проходящих через точку $A(0;1)$ и имеющих угловой коэффициент равный a. Видим, что есть три критических положения этих прямых m_1, m_2 и m_3. Прямая m_1 проходит через точку $B(-2;0)$, прямая m_2 параллельна прямой $y=-2x-4$, и m_3 параллельна $y=2x+4$. Угловые коэффициенты a прямых m_1, m_2 и m_3 равны $0,5, -2$ и 2, соответственно. Графики функций $y=|2x+4|$ и $y=ax+1$ имеют одну точку пересечения при $a=0,5$ и $a\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

Ответ. $a\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)\cup\{0,5\}$.

Пример 5. *При каких значениях параметра a уравнение $|x^2+6x+1|=a$ имеет ровно три решения?*

Решение. Построим график функции $y=|x^2+6x+1|$ (см. рис. 52). Построенный график и прямые $y=a$ имеют при $a>8$ и $a=0$ две общие точки; при $0<a<8$ – четыре; при $a=8$ – три и при $a<0$ нет точек пересечения. Следовательно, три решения будут только при $a=8$.

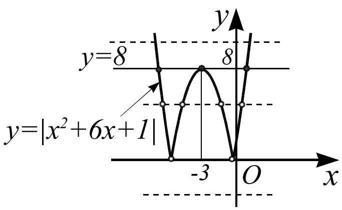


Рис. 52

Ответ. $a=8$.

Пример 6. *При каких значениях параметра a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0\le x\le 4$?*

Решение. Корни уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$, удовлетворяющие неравенству $0\le x\le 4$, являются решением смешанной системы

$$\begin{cases} 0\le x\le 4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2a+a-4+x=0, \\ x-a\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-2x+a-4+x=0, \\ x-a<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=(a+4)/3, \\ x\ge a, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3a-4, \\ x<a; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = (a+4)/3, \\ (a+4)/3 \ge a, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3a-4, \\ 3a-4 < a; \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = (a+4)/3, \\ a \le 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3a-4, \\ a < 2. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Проверим, что найденные корни уравнения удовлетворяют ограничениям $0 \le x \le 4$. Для корня $x = (a+4)/3$ получаем

$$\begin{cases} 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4, \\ a \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le a \le 8, \\ a \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le a \le 2.$$

Для $x = 3a-4$ $\begin{cases} 0 \le 3a-4 \le 4, \\ a < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/3 \le a \le 8/3, \\ a < 2; \end{cases} \Leftrightarrow 4/3 \le a < 2$.

При $a = 2$ корни совпадают.

Ответ. $4/3 \le a \le 2$.

Пример 7. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$3a + 2|x-a| = |x+3|.$$

Решение. Решим задачу аналитическим методом. Чтобы раскрыть модули, нужно выяснить расположение друг относительно друга чисел a и -3. Рассмотрим два случая: $a < -3$ и $a \ge -3$.

1. При $a < -3$ имеем $3a + 2|x-a| = |x+3|$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < a, \\ 3a + 2(-x+a) = -(x+3), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a, \\ x = 5a+3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -3, \\ x = 5a+3, \end{cases} \\ \begin{cases} a \le x < -3, \\ 3a + 2(x-a) = -(x+3), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le x < -3, \\ x = -\dfrac{a+3}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le -3/4, \\ a > 6, \\ \text{нет решений} \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x, \\ 3a + 2(x-a) = x+3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x, \\ x = 3-a; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -3, \\ x = 3-a. \end{cases} \end{array}\right.$$

2. При $a \ge -3$ имеем $3a + 2|x-a| = |x+3| \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ 3a + 2(-x+a) = -(x+3), \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < a, \\ 3a + 2(-x+a) = x+3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge a, \\ 3a + 2(x-a) = x+3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3\ , \\ x = 5a+3, \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < a, \\ x = \dfrac{5a-3}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge a, \\ x = 3-a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 \le a < -6/5, \\ x = 5a+3, \end{cases} \\ \begin{cases} -6/5 \le a < 3/2, \\ x = \dfrac{5a-3}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 3/2, \\ x = 3-a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для записи ответа нанесем полученные контрольные значения $a = -3;\ -6/5;\ 3/2$ и решения на числовую ось Oa (см. рис. 53).

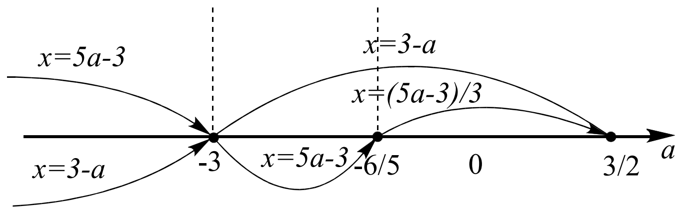


Рис. 53

Ответ. Если $a < -6/5$, то $x_1 = 5a+3$, $x_2 = 3-a$;
если $-6/5 \le a < 1{,}5$, то $x_1 = (5a+3)/3$, $x_2 = 3-a$;
если $a = 1{,}5$, то $x = 1{,}5$; при $a > 1{,}5$ решений нет.

Пример 8. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$x + |x-a| = |x-3|.$$

Решение. Рассмотрим два случая: $a < 3$ и $a \ge 3$.

1. При $a < 3$ имеем $x + |x-a| = |x-3| \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x - x + a = -x + 3, \text{ если } x < a, \\ x + x - a = -x + 3, \text{ если } a \le x < 3, \\ x + x - a = x - 3, \text{ если } x \ge 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - a, \text{ если } x < a, \\ x = \dfrac{a+3}{3}, \text{ если } a \le x < 3, \\ x = a - 3, \text{ если } x \ge 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } 3-a<a,\\ x=\dfrac{a+3}{3},\text{ если } a\le\dfrac{a+3}{3}<3,\\ x=a-3,\text{ если } a-3\ge 3;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } a>1{,}5,\\ x=\dfrac{a+3}{3},\text{ если } a\le 1{,}5,\\ x=a-3,\text{ если } a\ge 6.\end{array}\right.$$

С учетом ограничения $a<3$ получаем $\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } 1{,}5<a<3,\\ x=\dfrac{a+3}{3},\text{ если } 1{,}5\ge a.\end{array}\right.$

2. При $a\ge 3$ имеем $x+|x-a|=|x-3|\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-x+a=-x+3,\text{ если } x<3,\\ x-x+a=x-3,\text{ если } 3\le x<a,\\ x+x-a=x-3,\text{ если } x\ge a;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } x<3,\\ x=-a-3,\text{ если } 3\le x<a,\\ x=a-3,\text{ если } x\ge a;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } 3-a<3,\\ x=-a-3,\text{ если } 3\le -a-3<a,\\ x=a-3,\text{ если } a-3\ge a;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-a,\text{ если } a>0,\\ x=-a-3,\text{ если } \begin{cases} a\le -6,\\ a>-1{,}5\end{cases}(\varnothing),\\ x=a-3,\text{ если } -3\ge 0\ (\varnothing).\end{array}\right.$$

С учетом ограничения $a\ge 3$ получаем $x=3-a$.

Для записи ответа нанесем полученные контрольные значения $a=1{,}5$ и $a=3$, а также решения на числовую ось Oa (см. рис. 54).

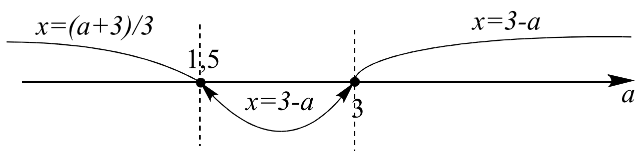


Рис. 54

Ответ. Если $a\le 1{,}5$, то $x=\dfrac{a+3}{3}$;

если $a>1{,}5$, то $x=3-a$.

Задачи для самостоятельного решения

Определите, при каких значениях a имеет хотя бы одно решение уравнение:

4.4.1. а) $|4-2x|+|x+3|=a$; б) $|x+4|-|x-2|=a$;

в) $|2x+1|=x-a$.

4.4.2. а) $|x+1|-|2x-a|=3$; б) $|x+a|-|x-a|=1$.

4.4.3. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $|x^{2002}-a|=a-x^{2002}$; б) $|x+a|=2x+1$; в) $x|x+1|=a$;

г) $2|x|+|a|=x+1$; д) $|x+3|-a|x-1|=4$; е) $|x^2+4x|=ax$.

4.4.4. При каких значениях параметра a уравнение:

а) $|x^2+3|x|-4|=a$ имеет ровно три корня;

б) $|x^2-3|x|-4|=a$ имеет четыре корня?

4.4.5. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x+4|-2x=ax-1:$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решения.

4.4.6. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $|2x-a|=|x|+1$; б) $|x|+|x-a|=x+1$;

в) $2|x+a|-|x-2a|=3a$; г) $|||x-a|-2a|+a|=x$.

4.4.7. При каких значениях параметра a все решения уравнения:

а) $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0\le x\le 4$;

б) $3|x-a|+2a-3+x=0$ удовлетворяют неравенству $-2\le x\le 5$?

4.4.8. При каких значениях параметра a имеет ровно три решения уравнение:

а) $(|x-4a+1|+|x-8a+1|-4)(2ax^2+24ax-x+22a-11)=0$;

б) $(|x-6a-1|+|x-12a-1|-4)(3ax^2+24ax-x-27a-9)=0$?

4.4.9. Найдите все значения параметра a, при которых имеет бесконечно много решений система уравнений:

а) $\begin{cases}|x-2a+2|=y,\\ |y-a+2|=x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x+0,5a+1|=y,\\ |y+3a-3|=x.\end{cases}$

§ 4.5. Неравенства, содержащие знак абсолютной величины

Аналитические методы

При решении неравенств, содержащих знаки абсолютной величины, следует пользоваться следующими логическими схемами:

$$\text{а) } |f(x,a)| > g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,a) > g(x,a), \\ f(x,a) < -g(x,a); \end{array}\right. \qquad (5.1)$$

или

$$\text{б) } |f(x,a)| < g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a) < g(x,a), \\ f(x,a) > -g(x,a). \end{cases} \qquad (5.2)$$

Пример 1. *Для каждого значения* a *решить неравенство:*

а) $|x-4|<a$; б) $|\ x-3\ |(x-a)>0$; в) $x^2<a$.

а) ***Решение.*** При $a \le 0$ неравенство не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна.

Соответственно, при $a>0$

$$|x-4|<a \Leftrightarrow \begin{cases} x-4<a, \\ x-4>-a \end{cases} \Leftrightarrow 4-a<x<4+a.$$

Ответ. Если $a \le 0$, то решений нет;
если $a>0$, то $x \in (4-a;4+a)$.

б) ***Решение.*** В неравенстве $|x-3|(x-a)>0$ при $x \ne 3$ первый множитель положителен. Следовательно, для выполнения неравенства и второй множитель должен быть положителен, т.е. $x>a$ и $x \ne 3$.

Ответ. Если $a<3$, то $x \in (a;3) \cup (3;+\infty)$,
если $a \ge 3$, то $x \in (a;+\infty)$.

в) ***Решение.*** Исходное неравенство не содержит знаков абсолютной величины, но сводится к таковому.

При $a \le 0$ неравенство $x^2 < a$ не имеет решений.

При $a>0$ имеем $x^2 < a \Leftrightarrow |x|<\sqrt{a} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{a};\sqrt{a})$.

Ответ. Если $a \le 0$, то решений нет;
если $a>0$, то $x \in (-\sqrt{a};\sqrt{a})$.

Для решения неравенств вида

$$|f_1(x,a)|+\ldots+|f_k(x,a)|-|f_{k+1}(x,a)|-\ldots-|f_n(x,a)|\geq g(x,a)$$

применяют ***метод «частичных областей»*** или ***метод интервалов***.

Основная идея метода «частичных областей» состоит в том, что решение задачи в исходной области (в частности, на плоскости Oxa) сводится к решению совокупности неравенств, не содержащих знаков абсолютной величины, в каждой частичной области, на которые разбивается исходная область.

Основная идея метода интервалов состоит в том, что область определения неравенства (в частности, числовая прямая Ox) разбивается на интервалы, и на каждом из них любое выражение, стоящее под знаком модуля в исходном неравенстве, для всех значений x из этого интервала имеет «один и тот же знак», поэтому на каждом интервале исходное неравенство заменяют равносильным неравенством, не содержащим знака абсолютной величины. Особенности этого метода решения неравенств с параметрами такие же, как и в случае решения уравнений с параметром. В случае, если неравенство содержит только одно выражение с модулем, то при его решении достаточно, используя определение модуля, освободиться от знаков абсолютной величины.

Пример 2. *Для каждого значения a решить неравенство*

$$2x+|x-a|>1.$$

Решение. Используя определение модуля, перейдем к совокупности двух систем. Имеем

$$2x+|x-a|>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+x-a>1,\\ x-a\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}2x-x+a>1,\\ x-a<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>(a+1)/3,\\ x\geq a,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1-a,\\ x<a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Для первой системы совокупности, сравнивая числа $(a+1)/3$ и a, получим $\dfrac{a+1}{3}\geq a$ при $a\leq 0{,}5$. Тогда, если $a\leq 0{,}5$, то $x>\dfrac{a+1}{3}$; если $a>0{,}5$, то $x\geq a$.

Для второй системы получаем неравенство $1-a<x<a$, справедливое при $a>0{,}5$.

Объединяя полученные решения, получим окончательный ответ.

Ответ. Если $a\le 0{,}5$, то $x\ge (a+1)/3$; если $a>0{,}5$, то $1-a<x$.

Пример 3. *Какие значения может принимать выражение* $x+y$ *при условии, что* $|y|\le (x-2)(4-x)$?

Решение. Пусть $x+y=a$; тогда условие задачи можно переформулировать следующим образом: *при каких значениях* a *неравенство* $|a-x|\le (x-2)(4-x)$ *имеет хотя бы одно решение?*

Имеем $|a-x|\le (x-2)(4-x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+8\le a-x\le -x^2+6x-8\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+8-a\le 0,\\ x^2-7x+8+a\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5-\sqrt{4a-7})/2\le x\le (5+\sqrt{4a-7})/2, \text{ если } a\ge 7/4,\\ (7-\sqrt{17-4a})/2\le x\le (7+\sqrt{17-4a})/2, \text{ если } a\le 17/4.\end{cases}$$

Полученные два отрезка всегда имеют, по крайней мере, одну общую точку, так как правая граница первого всегда лежит правее левой границы второго при $7/4\le a\le 17/4$. Действительно $\dfrac{5+\sqrt{4a-7}}{2}\ge\dfrac{7-\sqrt{17-4a}}{2}$ или $\sqrt{4a-7}+\sqrt{17-4a}\ge 2$. Возводя в квадрат обе части последнего неравенства, получаем $\sqrt{4a-7}\cdot\sqrt{17-4a}\ge -3$.

Ответ. $7/4\le x+y\le 17/4$.

Графические методы

Пример 4. *Для каждого значения* a *решить неравенство*

$$|x^2+a|<2.$$

Решение. Имеем $|x^2+a|<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+a<2,\\ x^2+a>-2;\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2<2-a,\\ x^2>-2-a.\end{cases}$

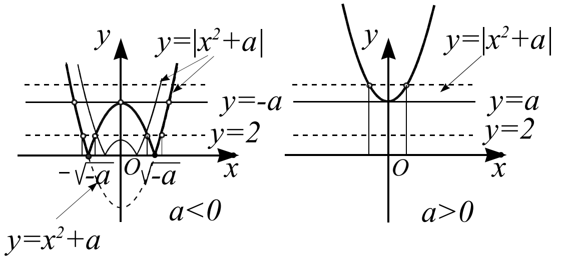


Рис. 55

Используя графический метод, находим два контрольных значения параметра $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$ (см. рис. 55).

1. При $a \ge 2$ неравенство не имеет решений.

2. При $2 > a \ge -2$ второе неравенство системы справедливо всегда, а первое – дает $-\sqrt{2-a} < x < \sqrt{2-a}$.

3. При $a < -2$ из первого неравенства системы $-\sqrt{2-a} < x < \sqrt{2-a}$, а из второго $x < -\sqrt{-2-a}$ или $x > \sqrt{-2-a}$. Так как $-2-a < 2-a$, то решением системы являются $x \in (-\sqrt{2-a}; -\sqrt{-2-a}) \cup (\sqrt{-2-a}; \sqrt{2-a})$.

Ответ. Если $a \ge 2$, то решений нет;
если $2 > a \ge -2$, то $x \in (-\sqrt{2-a}; \sqrt{2-a})$;
если $a < -2$, то $x \in (-\sqrt{2-a}; -\sqrt{-2-a}) \cup (\sqrt{-2-a}; \sqrt{2-a})$.

Пример 5. *При каких значениях а неравенство* $|x+a| < 4 - x^2$ *имеет хотя бы одно отрицательное решение?*

Решение. В системе координат Oxy построим графики левой и правой частей неравенства $y_1 = |x+a|$ и $y_2 = 4 - x^2$ (см. рис. 56). График функции y_2 неподвижен, а график $y_1 = |x+a|$ получается сдвигом вдоль оси Ox графика $y = |x|$ на $-a$ единиц.

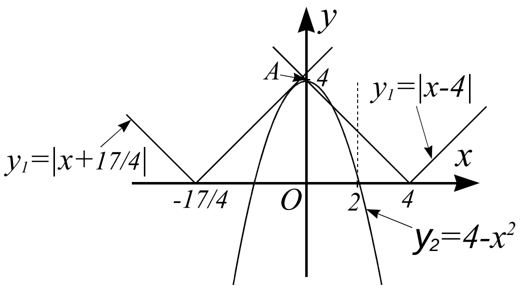


Рис. 56

Существует два предельных положения графика функции $y_1 = |x+a|$. Первое значение a определяется из условия единственности общей точки правой ветви графика y_1 и параболы $y_2 = 4 - x^2$. Из уравнения $x + a = 4 - x^2$ следует, что решение единственно при $a = 17/4$.

Второе значение a определяем из условия, что левая ветвь графика y_1 проходит через точку $A(0;4)$. В этом случае получаем $a = -4$.

Ответ. $-4 < a < 17/4$.

Пример 6. *Для каждого значения* a *решить неравенство*

$$|x-1| + |x+a| \geq 3x.$$

Решение. *Способ 1 (графический).*

$$|x-1| + |x+a| \geq 3x \Leftrightarrow |x+a| \geq 3x - |x-1|.$$

Построим графики функций (см. рис. 57), стоящих в правой и левой частях полученного неравенства. $y = 3x - |x-1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x \geq 1, \\ 4x-1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

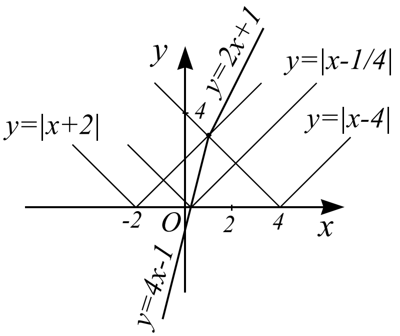


Рис. 57

График функции $\varphi(x,a) = |x+a|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на a единиц и имеет три критических положения, соответствующих значениям параметра a, равным -2, $-1/4$ и 4 соответственно (см. рис. 57). Исходному неравенству удовлетворяют координаты точек x, при которых график функции $\varphi(x,a)$ расположен выше графика функции $y = 3x - |x-1|$. Абсциссы точек пересечения указанных графиков определяются из уравнения $|x+a| = 3x - |x-1|$.

Ответ. Если $a \leq -4$, то $x \leq -\dfrac{a+1}{3}$; если $-4 \leq a \leq -1/4$; то $x \leq \dfrac{1-a}{5}$; если $-1/4 \leq a \leq 2$, то $x \leq \dfrac{a+1}{3}$; если $a \geq 2$; то $x \leq a - 1$.

Способ 2 (аналитический). Перенесем в правую часть неравенства $|x+a|$, а далее, для решения полученных неравенств, применим логическую схему (5.1)

$$|x+a| \ge 3x - |x-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+a \ge 3x - |x-1|, \\ x+a \le -3x + |x-1|; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| \ge 2x-a, \\ |x-1| \ge 4x+a; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \ge 2x-a, \\ x-1 \le a-2x, \\ x-1 \ge 4x+a, \\ x-1 \le -4x-a; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le a-1, \\ x \le (a+1)/3, \\ x \le -(a+1)/3, \\ x \le (1-a)/5. \end{array}\right.$$

Соответственно, решением неравенства будет множество $x \le b$, где $b = \max\{a-1, (a+1)/3, -(a+1)/3, (1-a)/5\}$. Для нахождения наибольшего из четырех чисел в зависимости от значений параметра применим графический метод. Для этого построим графики линейных функций $x = a-1$, $x = (a+1)/3$, $x = -(a+1)/3$, $x = (1-a)/5$ (см. рис. 58) и найдем абсциссы их точек пересечения. Для каждого конкретного значения параметра a берем число, соответствующее наибольшей ординате для точек пересечения с графиками функций прямой $a = const$.

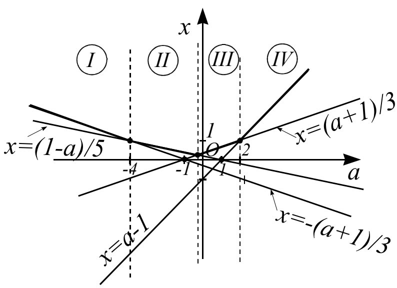


Рис. 58

Числовая прямая Oa в результате разбивается точками $-4, -1/4$ и 2 на четыре промежутка. На каждом из них записываем ответ (см. выше).

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a решите неравенство:

4.5.1. а) $|x-2| < a^2 - 4$; б) $x^2 \ge a$;

в) $|x-4|(x-a) < 0$; г) $x^2 > (a-1)^2$.

4.5.2. а) $|2x-4| \le 3x+2a$; б) $|3x+2| \le 4a-x$.

4.5.3. а) $|5x+3| \geq 2x-3a$; б) $|2x-1| \geq x-2a$.

4.5.4. Определите, при каких значениях параметра a имеет:
а) хотя бы одно отрицательное решение неравенство $3-|x-a| > x^2$;
б) хотя бы одно положительное решение неравенство $x^2+|x-a| < 1$.

4.5.5. Какие значения может принимать разность чисел x и y, если $|y| \leq -4x(x+2)$?

4.5.6. Найдите наибольшее и наименьшее значение данного выражения.

а) $y+2x$, если x и y одновременно удовлетворяют условиям:

$$3|y| \leq x+6 \text{ и } |y| \geq x-2;$$

б) $4y+x$, если x и y одновременно удовлетворяют условиям:

$$11|y| \leq 3x+12 \text{ и } |y| \geq x-4.$$

4.5.7. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой неравенств, равна m, если:

а) $m=64$ и $\begin{cases} 3|y| \leq x+6, \\ |y| \leq ax+10; \end{cases}$ б) $m=27$ и $\begin{cases} 2|y| \leq 5-x, \\ |y| \leq ax+4. \end{cases}$

4.5.8. Для каждого значения параметров a и b решите неравенство.

а) $|x+a|+|x-a| < 5$; б) $|x+a|-|x-a| < 5$;
в) $|2x+a|+|x-2a| < 3$; г) $|2x+a|+|x-2a| < b$.

4.5.9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данное неравенство выполняется для двух различных значений x.

а) $\dfrac{|a-2||x+a-4|}{2}+\left(\dfrac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)|x-2|+\dfrac{|a-2||x-a|}{2} \leq 1$;

б) $\dfrac{|a+3||x+a+6|}{2}+\left(\dfrac{a^2+6a+8}{|a+3|}-|a+3|\right)|x+3|+\dfrac{|a+3||x-a|}{2} \leq 2$.

§ 4.6. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называют уравнение, содержащее под знаком радикала переменную, относительно которой оно решается. ***Областью допустимых значений уравнения*** являются те значения неизвестной переменной и параметра, при которых имеют смысл все входящие в уравнение функции (в частности, неотрицательны подкоренные выражения в радикалах четной степени).

При решении иррациональных уравнений обычно используются следующие методы: (1) переход к равносильному рациональному уравнению возведением обеих частей уравнения в необходимую степень; (2) переход к смешанной системе, состоящей из уравнений и неравенств; (3) метод замены; (4) метод введения вспомогательных неизвестных (способ подстановки); (5) метод геометрической интерпретации; а также некоторые другие специальные методы решения.

Метод возведения в степень

При решении уравнений этим методом необходимо помнить, что в результате возведения обеих частей уравнения в одинаковую степень получается уравнение, являющееся следствием исходного, т.е. возможно появление «посторонних корней», которые должны быть устранены проверкой.

Замечание. При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному.

Пример 1. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt{x-a}=2\,.$$

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $x-a=4$ или $x=a+4$ при всех $a\in\mathbb{R}$.

Ответ. $x=a+4$, $a\in\mathbb{R}$.

Пример 2. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt[4]{a+x}-\sqrt[4]{a-x}=2\sqrt[8]{a^2-x^2}\,.$$

Решение. Находим ОДЗ: $\begin{cases} a-x\ge 0, \\ a+x\ge 0, \\ \sqrt[4]{a+x}-\sqrt[4]{a-x}\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le a, \\ a\ge 0. \end{cases}$

Возведем на ОДЗ обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{a+x}-2\sqrt[4]{a^2-x^2}+\sqrt{a-x}=4\sqrt[4]{a^2-x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=6\sqrt[4]{a^2-x^2}.$$

Опять возведем на ОДЗ обе части уравнения в квадрат (они положительны): $a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x=36\sqrt{a^2-x^2} \Leftrightarrow a=17\sqrt{a^2-x^2}$. После возведения еще раз в квадрат при $a \geq 0$ получим уравнение

$a^2=17^2a^2-17^2x^2$, из которого с учетом ОДЗ следует $x=\dfrac{12\sqrt{2}}{17}a$.

Ответ. Если $a<0$, то решений нет; если $a \geq 0$, то $x=(12\sqrt{2}a)/17$.

Переход к смешанной системе

При решении иррационального уравнения этим методом используется следующая эквивалентность (при $n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[2n]{f(x,a)}=g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a)=(g(x,a))^{2n}, \\ g(x,a) \geq 0. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Пример 3. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$\sqrt{x-2}=a.$$

Решение. $\sqrt{x-2}=a \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=a^2, \\ a \geq 0. \end{cases}$ При $a<0$ уравнение не имеет решений. При $a \geq 0$ корнями являются числа вида $x=a^2+2$.

Ответ. Если $a<0$, то решений нет; если $a \geq 0$, то $x=a^2+2$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{a-x^2}.$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{a-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=a-x^2, \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-a+4=0, \\ x \geq -4. \end{cases}$$

При $a \geq 15/4$ корнями уравнения $x^2+x+4-a=0$ являются числа $x_1=(-1-\sqrt{4a-15})/2$ и $x_2=(-1+\sqrt{4a-15})/2$. Проверим выполнение условий $x_1 \geq -4$ и $x_2 \geq -4$.

Для корня x_1 получаем цепочку неравенств

$$(-1-\sqrt{4a-15})/2 \ge -4 \Leftrightarrow -1-\sqrt{4a-15} \ge -8 \Leftrightarrow \sqrt{4a-15} \le 7,$$

решением которой является множество $15/4 \le a \le 16$.

Аналогично, для корня x_2 получаем цепочку неравенств

$$(-1+\sqrt{4a-15})/2 \ge -4 \Leftrightarrow -1+\sqrt{4a-15} \ge -8 \Leftrightarrow \sqrt{4a-15} \ge -7,$$

решением которой является множество $a \ge 15/4$.

Ответ. Если $a < 15/4$, то корней нет; если $a = 15/4$, то $x = -0{,}5$; если $15/4 < a \le 16$, то $x_1 = (-1-\sqrt{4a-15})/2$ и $x_2 = (-1+\sqrt{4a-15})/2$; если $a > 16$, то $x = (-1+\sqrt{4a-15})/2$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$x + \sqrt{x} = a.$$

Решение. Заметим, что $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \ge 0$. Перенося x в правую часть уравнения, получим уравнение $\sqrt{x} = a - x$.

$$\sqrt{x} = a - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 - 2ax + x^2, \\ a - x \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0, \\ x \le a. \end{cases}$$

При $a \ge -1/4$ корнями уравнения системы являются числа $x_1 = (2a+1-\sqrt{4a+1})/2$ и $x_2 = (2a+1+\sqrt{4a+1})/2$. Поскольку $x_2 > a$, то проверим для x_1 выполнение условий $0 \le x \le a$:

$$0 \le x_1 \le a \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \ge 2a+1-\sqrt{4a+1}, \\ 2a+1-\sqrt{4a+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4a+1} \ge 1, \\ 2a+1 \ge \sqrt{4a+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+1 \ge 1, \\ 4a^2+4a+1 \ge 4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 0.$$

Ответ. Если $a \ge 0$, то $x = (2a+1-\sqrt{4a+1})/2$; если $a < 0$, то решений нет.

Пример 6. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}\,.$$

Решение. Данное уравнение при $a<0$ не имеет решений, а при $a=0$ имеет единственный корень $x=0$. При $a>0$ уравнение $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x+a=a^2-2a\sqrt{x}+x, \\ a-\sqrt{x}\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a\sqrt{x}-a=0, \\ a-\sqrt{x}\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)/2=\sqrt{x}, \\ a\ge\sqrt{x}. \end{cases}$$

Чтобы исходное уравнение имело решение, необходимо выполнение условия $a\ge\dfrac{a-1}{2}\ge 0$, которое справедливо при $a\ge 1$. В этом случае $x=(a-1)^2/4$.

Ответ. Если $a\ge 1$, то $x=(a-1)^2/4$; если $a=0$, то $x=0$; при других a решений нет.

Метод замены

Пример 7. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=a\,.$$

Решение. Пусть $y=\sqrt{x+1}$, где $y\ge 0$. Тогда $x=y^2-1$. Исходное уравнение преобразуется к виду $y-\sqrt{2-y^2}=a$ или $\sqrt{2-y^2}=y-a$.

$$\sqrt{2-y^2}=y-a \Leftrightarrow \begin{cases} 2-y^2=y^2-2ay+a^2, \\ y-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-2ay+a^2-2=0, \\ y\ge a. \end{cases}$$

При $-2\le a\le 2$ корнями уравнения $2y^2-2ay+a^2-2=0$ являются числа $y_1=(a-\sqrt{4-a^2})/2$ и $y_2=(a+\sqrt{4-a^2})/2$.

Проверим для них выполнение условий $y\ge a$ и $y\ge 0$:

(1) $y_1\ge a$ или $(a-\sqrt{4-a^2})/2\ge a$. Последнее неравенство приводится к виду $a+\sqrt{4-a^2}\le 0$ (*). Для его решения применим ***обобщенный метод интервалов***.

Введем функцию $f(a) = a + \sqrt{4 - a^2}$. Нули функции определяются из уравнения $-a = \sqrt{4 - a^2}$.

$$-a = \sqrt{4 - a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 - a^2, \\ a \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2, \\ a \le 0. \end{cases}$$

Корень уравнения $a = -\sqrt{2}$. Следовательно, неравенство (*) будет справедливым при $-\sqrt{2} \le a \le 0$.

Проверим также условие $(a - \sqrt{4 - a^2})/2 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \sqrt{4 - a^2}$.

$$a \ge \sqrt{4 - a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 4 - a^2, \\ a \ge 0, \\ 4 - a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 2, \\ a \ge 0, \\ 4 \ge a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \le a \le 2.$$

Получаем, что не существует таких значений параметра a, при которых для y_1 выполняются оба условия $y_1 \ge a$ и $y_1 \ge 0$. Следовательно, y_1 – посторонний корень.

(2) Проверяя аналогично для корня y_2 выполнение условий $y_2 \ge a$ и $y_2 \ge 0$, получаем, что при $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$ оба неравенства справедливы. Следовательно, y_2 – корень уравнения $\sqrt{2 - y^2} = y - a$. Выполняя обратную замену, получаем $x = y_2^2 - 1 = (a\sqrt{4 - a^2})/2$.

Ответ. Если $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$, то $x = (a\sqrt{4 - a^2})/2$;
при других a решений нет.

Пример 8. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$x^2 - a = \sqrt{a - x}.$$

Решение. Обозначим $y = \sqrt{a - x}$, где $y \ge 0$. Учитывая исходное уравнение, получим систему $\begin{cases} x^2 - y = a, \\ y^2 + x = a. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение

$$x^2 - y^2 - x - y = 0 \text{ или } (x - y - 1)(x + y) = 0.$$

Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} x-y-1=0, \\ x+y=0, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a-x}, \\ x=-\sqrt{a-x}. \end{array}\right.$

Решим уравнения совокупности.

(1) $x-1=\sqrt{a-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-a=0, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Уравнение системы при $a \geq 3/4$ имеет корни $x_{1,2}=(1 \pm \sqrt{4a-3})/2$. Условию $x \geq 1$ удовлетворяет только $x=(1+\sqrt{4a-3})/2$ при $a \geq 1$.

(2) $x=-\sqrt{a-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-a=0, \\ x \leq 0. \end{cases}$

При $-1/4 \leq a$ уравнение системы имеет корни $x_{3,4}=(-1 \pm \sqrt{4a+1})/2$. Условию $x \leq 0$ при $a \leq 0$ удовлетворяют оба корня; при $a>0$ – только $x=(-1-\sqrt{4a+1})/2$.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ. Если $a<-1/4$, то решений нет;
если $-1/4 \leq a \leq 0$, то $x_1=(-1-\sqrt{4a+1})/2$ и $x_2=(-1+\sqrt{4a+1})/2$;
если $0<a<1$, то $x=(-1-\sqrt{4a+1})/2$;
если $a \geq 1$, то $x_1=(1+\sqrt{4a-3})/2$ и $x_2=(-1-\sqrt{4a+1})/2$.

Метод введения вспомогательных переменных

Данный метод состоит во введении вспомогательных неизвестных, с помощью которых уравнение сводится к системе рациональных уравнений относительно новых переменных. Например:

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt{x+b}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} v=\sqrt{x+b}, \text{ где } v \geq 0, \\ u=\sqrt[3]{x-a}, \\ u+v=3, \\ v^2-u^3=a+b. \end{cases}$$

Пример 9. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a.$$

Решение. Находим ОДЗ: $|x|\ge 1,\ |x|\ge\sqrt{2}$. Пусть $\sqrt{x^2-1}=u$, $\sqrt{x^2-2}=v$, тогда получим систему $\begin{cases} u+v=a, \\ u^2-v^2=1, \\ u\ge 0, \\ v\ge 0. \end{cases}$

При $a=0$ система не имеет решений.

Так как $u^2-v^2=(u+v)(u-v)=a(u-v)=1$, то при $a\ne 0$ получаем $u-v=\dfrac{1}{a}$. Учитывая, что $u+v=a$, находим $u=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$, $v=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$. Значения параметра a, при которых выполнены оба условия $u\ge 0$ и $v\ge 0$, найдем, решив систему неравенств $\begin{cases} a+\dfrac{1}{a}\ge 0, \\ a-\dfrac{1}{a}\ge 0. \end{cases}$

Первое неравенство справедливо при $a>0$, второе при $a\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$. Следовательно, оба условия $u\ge 0$ и $v\ge 0$ справедливы при $a\ge 1$.

При этих значениях a получаем уравнение

$$x^2-1=u^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 \text{ или } x^2=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+1.$$

Извлекая корень, получаем два решения $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+1}$.

Ответ. Если $a\ge 1$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+1}$;

если $a<1$, то решений нет.

Частные методы решения иррациональных уравнений

Пример 10. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$(x-2)\sqrt{x-a}=0.$$

Решение. При $x-a\geq 0$ данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=a. \end{array}\right.$

Отсюда $x=a$ при любом $a\in\mathbb{R}$, $x=2$ при $a<2$.

Ответ. Если $a<2$, то $x_1=a$ и $x_2=2$; если $a=2$, то $x=2$; если $a>2$, то $x=a$.

При решении уравнения вида $\sqrt{f_1^2(x,a)}+\ldots+\sqrt{f_n^2(x,a)}=g(x,a)$ следует учитывать, что оно равносильно уравнению

$$|f_1(x,a)|+\ldots+|f_n(x,a)|=g(x,a).$$

Рассмотрим далее решение примера, в котором используется прием решения уравнения относительно параметра.

Пример 11. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\sqrt{a+\sqrt{x+a}}=x.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{a+\sqrt{x+a}}=x \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{x+a}=x^2, \\ x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a=(x^2-a)^2, \\ x^2-a\geq 0, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и группируя члены в уравнении последней системы, получим $a^2-(2x^2+1)\ a+(x^4-x)=0$. Выражение в левой части – это квадратный трехчлен относительно a, который можно разложить на множители:

$$a^2-(2x^2+1)\ a+(x^4-x)=$$

$$=\left(a-\frac{(2x^2+1)+(2x+1)}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{(2x^2+1)-(2x+1)}{2}\right)=$$

$$=(a-(x^2+x+1))(a-(x^2-x))=0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a+\sqrt{x+a}}=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1=a, \\ x^2-a\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x^2-a\ge 0, \\ x\ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-a=-x-1, \\ -x-1\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-a=x, \\ x\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система этой совокупности не имеет решений.
Вторая – равносильна системе

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)=0, \\ x\ge 0, \\ a\ge -\dfrac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1/4\le a\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a>0, \\ x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если $a<-1/4$, то решений нет;
если $-1/4<a\le 0$, то $x_1=(1-\sqrt{1+4a})/2$ и $x_2=(1+\sqrt{1+4a})/2$;
при $a=-1/4$ и $a>0$ одно решение $x=(1+\sqrt{1+4a})/2$.

Рассмотрим применение графического метода.

Пример 12. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$1-x=\sqrt{a^2-x^2}\ .$$

Решение. Рассмотрим графики функций $y_1=1-x$ и $y_2=\sqrt{a^2-x^2}$. График y_1 – прямая (см. рис. 59), графиками y_2 являются верхние полуокружности радиуса $|a|$ с центром в начале координат.

Имеется два критических положения графиков y_2, соответствующие значениям $|a|=1/\sqrt{2}$ и $|a|=1$. При значениях a таких, что $|a|<1/\sqrt{2}$ графики функций y_1 и y_2 не имеют общих точек; при $|a|=1/\sqrt{2}$ – одну; при $1/\sqrt{2}<|a|\le 1$ – две общие точки; при $|a|>1$ – одну.

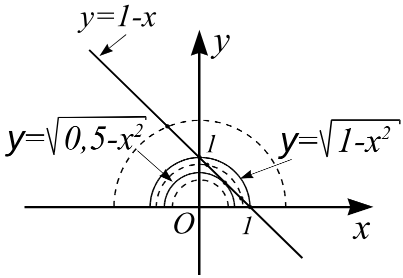


Рис. 59

Абсциссы точек пересечения графиков определяются из уравнения $2x^2-2x+1-a^2=0$ и при $1/\sqrt{2}\le|a|\le 1$ вычисляются по формулам $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

Ответ. Если $|a|<1/\sqrt{2},$ то решений нет; если $|a|=1/\sqrt{2},$ то $x=0,5;$

если $1/\sqrt{2}<|a|\le 1,$ то $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{2a^2-1}}{2}$;

если $|a|>1$, то $x=\dfrac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a решите данное уравнение.

4.6.1. а) $\sqrt{2x-1}=a-1$; б) $\sqrt{2x+a^2}=2-a$.

4.6.2. а) $(a^2-1)\sqrt{x-x^2}=0$; б) $\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-4}}=0$.

4.6.3. а) $\sqrt{x+3}=\sqrt{x-a}$; б) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+a}$;

в) $\sqrt{6x+9}=\sqrt{a-x^2}$.

4.6.4. а) $(x^2-9)\sqrt{x-a}=0$; б) $(x-a)\sqrt{x^2-9}=0$.

4.6.5. Используя графический метод, установите количество корней уравнения:

а) $\sqrt{x+3}=2x+a$; б) $\sqrt{x}=x-a$;

в) $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-x-a}$; г) $\sqrt{4-x^2}=x+a$.

4.6.6. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения:

а) $\sqrt{x-2a}=x$; б) $\sqrt{ax-2}=-x$;

в) $\sqrt{9-x^2}=(a-1)x$; г) $\sqrt{9-x^2}=ax+4$.

Для каждого значения параметра a решите данное уравнение.

4.6.7. а) $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}=3$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{b+x}{a-x}}=2$.

4.6.8. а) $x-\sqrt{x}=a$; б) $\sqrt{x+a}=x^2-a$; в) $x+\sqrt{x^2-1}=a$.

4.6.9. а) $\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+2a}=4$; б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1$.

4.6.10. а) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{x^2+3a^2}-\sqrt{x^2-3a^2}=x\sqrt{2}$.

4.6.11. а) $\sqrt{x+a}=a+\sqrt{x}$; б) $\sqrt{a-\sqrt{x+a}}=x$.

4.6.12. а) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=a$; б) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=a$;

в) $\sqrt{3x+5}-\sqrt{x-2}=a$.

4.6.13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых данное уравнение имеет решение.

а) $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$;

б) $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\dfrac{x^2}{4}}}+x+\dfrac{x^2}{4}=0.$

§ 4.7. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств, как правило, приходится возводить обе части неравенства в натуральную степень. При этом необходимо следить за равносильностью неравенств, т.е. за тем, чтобы при преобразованиях не происходило потери или приобретения лишних решений.

Основным методом решения иррационального неравенства является сведение его к системе неравенств или совокупности подобных систем. Для этого используются следующие схемы:

$$\text{а) } \sqrt{f(x,a)} \geq g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x,a) \leq 0, \\ f(x,a) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,a) \geq 0, \\ f(x,a) \geq g^2(x,a); \end{cases} \end{array}\right. \tag{7.1}$$

$$\text{б) } \sqrt{f(x,a)} \leq g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x,a) \geq 0, \\ 0 \leq f(x,a) \leq g^2(x,a). \end{cases} \tag{7.2}$$

Пример 1. *Для каждого значения параметра a решите неравенства*: а) $\sqrt{x} \geq a$; б) $a\sqrt{x} \geq 0$.

а) ***Решение.*** Имеем $\sqrt{x} \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ x \geq a^2. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ. Если $a < 0$, то $x \geq 0$; если $a \geq 0$, то $x \geq a^2$.

б) ***Решение.*** Имеем $a\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ. Если $a < 0$, то $x = 0$; если $a \geq 0$, то $x \geq 0$.

Пример 2. *Для каждого значения параметра* b *найдите все решения неравенства* $(5-x)\sqrt{x-b}\le 0$.

Решение. Имеем $(5-x)\sqrt{x-b}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-x\le 0,\\ x-b>0;\end{cases}\\ x-b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 5,\\ x>b;\end{cases}\\ x=b.\end{array}\right.$

Ответ. Если $b\ge 5$, то $x\ge b$; если $b<5$, то $x\ge 5$ и $x=b$.

Пример 3. *Для каждого значения параметра* a *решите неравенство* $\sqrt{a-2x}>x$.

Решение. $\sqrt{a-2x}>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-2x\ge 0,\\ x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}a-2x>x^2,\\ x\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le a/2,\\ x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2x-a<0,\\ x\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Корнями квадратного трехчлена x^2+2x-a являются числа $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+a}$ и решение неравенства $x^2+2x-a<0$ есть $x\in(-1-\sqrt{1+a};\ -1+\sqrt{1+a})$ при условии $a\ge -1$. При $a<-1$ неравенство $x^2+2x-a<0$ решений не имеет. Учитывая неравенство $x\ge 0$, заключаем, что решение второй системы совокупности есть множество $x\in[0;\ -1+\sqrt{1+a})$ при $a\ge 0$.

Первая система при $a<0$ дает множество $x\in(-\infty;\ a/2]$, а при $a\ge 0$ – множество $x\in(-\infty;\ 0)$.

Ответ. Если $a<0$, то $x\in(-\infty;\ a/2]$,
если $a\ge 0$, то $x\in(-\infty;\ -1+\sqrt{1+a})$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *найдите все решения неравенства* $x+\sqrt{a-x}>0$.

Решение. Имеем $x+\sqrt{a-x}>0 \Leftrightarrow \sqrt{a-x}>-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - x \ge 0, \\ -x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a - x > x^2, \\ -x \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge x, \\ x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - a < 0, \\ x \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система при $a > 0$ дает множество $x \in (0;\ a]$, а при $a \le 0$ решений нет. Корнями квадратного трехчлена $x^2 + x - a$ являются $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ и решение неравенства $x^2 + x - a < 0$ есть $x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \right)$ при $a > -\dfrac{1}{4}$. С учетом неравенства $x \le 0$ получаем, что решение второй системы совокупности есть множество $x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \right)$ при $-\dfrac{1}{4} < a < 0$ и множество $x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\ 0 \right]$ при $a > 0$. При $a = 0$ решений нет

Ответ. Если $a \le -1/4$ и $a = 0$, то решений нет;
если $-1/4 < a < 0$, то $x \in \left((-1-\sqrt{1+4a})/2;\ (-1+\sqrt{1+4a})/2 \right)$;
если $a > 0$, то $x \in \left((-1-\sqrt{1+4a})/2;\ 0 \right]$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра а решите неравенство* $\sqrt{2ax - x^2} \ge a - x$.

Решение. $\sqrt{2ax - x^2} \ge a - x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2ax - x^2 \ge 0, \\ a - x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2ax - x^2 \ge (a-x)^2, \\ a - x \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2ax - x^2 \ge 0, \\ a < x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 4ax + a^2 \le 0, \\ x \le a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Корнями квадратного трехчлена $2ax - x^2$ являются числа $x_1 = 0$ и $x_2 = 2a$. Решение неравенства $2ax - x^2 \geq 0$ при условии $a < x$ при $a < 0$ есть $x \in (a; 0]$, а при $a \geq 0$ есть $x \in (a; 2a]$.

Корни квадратного трехчлена $2x^2 - 4ax + a^2$ равны $x_{3,4} = \dfrac{2a \pm a\sqrt{2}}{2}$. Решением неравенства $2x^2 - 4ax + a^2 \leq 0$ при условии $a \geq x$ при $a < 0$ являются все значения $x \in \left[(1 + 1/\sqrt{2})a; 0\right]$, а при $a \geq 0$ есть $x \in \left[(1 - 1/\sqrt{2})a; a\right]$.

Ответ. Если $a < 0$, то $x \in \left[(1 + 1/\sqrt{2})a; 0\right]$;

если $a \geq 0$, то $x \in \left[(1 - 1/\sqrt{2})a; 2a\right]$.

Пример 6. *Для каждого значения параметра а найти все решения неравенства* $\sqrt{x^2 - a^2} \leq x - 2a$.

Решение. $\sqrt{x^2 - a^2} \leq x - 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2a \geq 0, \\ x^2 - a^2 \geq 0, \\ x^2 - a^2 \leq x^2 - 4ax + 4a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2a, \\ x^2 \geq a^2, \\ 4ax - 5a^2 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2a, \\ x^2 \geq a^2, \\ 4a\left(x - 5a/4\right) \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

(1) При $a > 0$. $\begin{cases} x \geq 2a, \\ x^2 \geq a^2, \\ 4a\left(x - 5a/4\right) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2a, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -a, \\ x \geq a, \end{array}\right. \\ x \leq 5a/4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2a, \\ x \leq 5a/4. \end{cases}$

Полученная система не имеет решений.

(2) При $a<0$. $\begin{cases} x \ge 2a, \\ x^2 \ge a^2, \\ 4a\left(x-5a/4\right) \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2a, \\ \left[\begin{array}{l} x \le a, \\ x \ge -a, \end{array}\right. \\ x \ge 5a/4; \end{cases} \Leftrightarrow 5a/4 \le x \le a$.

(3) При $a=0$. В этом случае исходное неравенство имеет вид:
$\sqrt{x^2} \le x \Leftrightarrow |x| \le x \Leftrightarrow x \ge 0$.

Ответ. Если $a<0$, то $5a/4 \le x \le a$; если $a=0$, то $x \ge 0$; если $a>0$, то решений нет.

Метод замены

Продемонстрируем использование этого метода, применив его для решения неравенства из примера 3.

Пример 7. *Решите неравенство* $\sqrt{a-2x} > x$.

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt{a-2x}$. Тогда $x=(a-y^2)/2$.
Решение неравенства сводится к решению системы $\begin{cases} y^2+2y-a>0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Корнями квадратного трехчлена y^2+2y-a являются числа $y_1=-1-\sqrt{1+a}$ и $y_2=-1+\sqrt{1+a}$. Соответственно, решением системы будет: $y \ge 0$ при $a<0$ и $y>-1+\sqrt{1+a}$ при $a \ge 0$. Тогда, согласно условию задачи, при $a<0$ получим $y=\sqrt{a-2x} \ge 0 \Leftrightarrow$ $a-2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le a/2$, а при $a \ge 0$, так как $y>-1+\sqrt{1+a}$ и $y>x$, то $x<-1+\sqrt{1+a}$.

Ответ. Если $a<0$, то $x \in (-\infty;\ a/2]$, если $a \ge 0$, то $x \in (-\infty;\ -1+\sqrt{1+a})$.

Графический метод

При решении иррационального неравенства графическим методом задача сводится к нахождению абсцисс точек пересечения графиков функций, стоящих в левой и правой частях неравенства, т.е. к решению иррациональных уравнений, и далее к геометрической интерпретации получившейся на координатной плоскости Oxy картины.

Графический метод обычно применяют при решении задач, в которых требуется ответить на вопрос о существования решения или наличия решения определенного вида.

Пример 8. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$\sqrt{a^2-x^2} \ge 4-2x:$$

а) *имеет решение;* б) *имеет отрицательные решения;*
в) *его решения образуют отрезок*?

Решение. Рассмотрим на плоскости Oxy графики функций

$$y_1=\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{и} \quad y_2=4-2x.$$

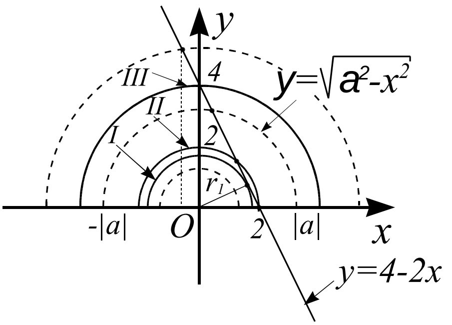


Рис. 60

Формула $y_1=\sqrt{a^2-x^2}$ задает семейство функций, графиками которых при фиксированном значении параметра $a \ne 0$ является верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$ (см. рис. 60), график y_2 – прямая линия, проходящая через точки $(0;4)$ и $(2;0)$.

Решениями данного нера-венства будут являться значения x, для которых график y_1 будет расположен выше графика y_2.

Имеется три критических положения графика y_1 (в соответствии с условием задачи).

(I) Полуокружность касается прямой $y_2=4-2x$. Радиус r находится как высота прямоугольного треугольника с катетами 2 и 4, проведенная к гипотенузе, и равен $4/\sqrt{5}$. Соответствующее значение параметра a равно $-4/\sqrt{5}$ или $4/\sqrt{5}$.

(II) Полуокружность проходит через точку $(2;0)$. Соответствующее значение параметра a равно -2 или 2.

(III) Полуокружность проходит через точку $(0;4)$. Соответствующее значение параметра a равно -4 или 4.

Используя геометрические соображения, запишем ответ задачи.

Ответ. **а)** При $a \in (-\infty; -4/\sqrt{5}] \cup [4/\sqrt{5}; +\infty)$;

б) при $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; **в)** при $a \in [-2; -4/\sqrt{5}) \cup (4/\sqrt{5}; 2]$.

Некоторые частные методы

Пример 9. *Для каждого значения параметра a найти все решения неравенства $a\sqrt{x+1} \le 1$.*

Решение.

$$a\sqrt{x+1} \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 \ge 0 \text{ при } a < 0, \\ \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x+1 \le 1/a^2 \end{cases} \text{ при } a > 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -1 \text{ при } a \le 0, \\ -1 \le x \le \dfrac{1-a^2}{a^2} \text{ при } a > 0. \end{array} \right.$$

В итоге имеем: $x \ge -1$ при $a \le 0$; $-1 \le x \le -1 + \dfrac{1}{a^2}$ при $a > 0$.

Ответ. Если $a \le 0$, то $x \ge -1$; если $a > 0$, то $-1 \le x < -1 + \dfrac{1}{a^2}$.

Пример 10. *Решите неравенство $\sqrt{x+a} + \sqrt{a-x} \ge a$ при $a > 0$.*

Решение. Находим ОДЗ неравенства $-a \le x \le a$. Поскольку обе части неравенства положительны, их можно возвести в квадрат на ОДЗ:

$$x + a + 2\sqrt{a^2 - x^2} + a - x \ge a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 - 2a \ge 0, \\ 4a^2 - 4x^2 > a^4 - 4a^3 + 4a^2, \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - 2a < 0, \\ a^2 - x^2 \ge 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 2, \\ x^2 < a^3 - a^4/4, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 > a > 0, \\ a^2 \ge x^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Проверим выполнение условий $0 < a^3 - a^4/4 \le a^2$. Левая часть этого неравенства выполняется при $a \in [2;4)$, правая – при всех a. В результате получаем, что первая система совокупности имеет решение

$x \in \left(-(a\sqrt{4a-a^2})/2;\ (a\sqrt{4a-a^2})/2\right)$ при $a \in [2;4)$, а вторая – решение $x \in [-a; a]$ при $a \in (0;2)$.

Ответ. Если $a \in (0;2)$, то $x \in [-a;\ a]$;

если $a \in [2;4)$, то $x \in \left((-\sqrt{4a^3-a^4})/2;\ (\sqrt{4a^3-a^4})/2\right)$;

если $a \geq 4$, то решений нет.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждого значения параметра a найдите все решения данного неравенства.

4.7.1. а) $\sqrt{x} < a$; б) $a\sqrt{x} < 0$;

в) $(x-a)\sqrt{x} \geq 0$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} > 0$.

4.7.2. а) $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}$; б) $\sqrt{x^2+ax+1} \geq \sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x^2-ax+1} \geq \sqrt{1-x}$; г) решите в зависимости от значений параметров a и b неравенство $\sqrt{x-a} \geq \sqrt{2x-b}$.

4.7.3. а) $\sqrt{1-x} + 1 \leq x - a^2$; б) $\sqrt{x-2} + x \leq 2 - a^2$;

в) $\sqrt{1-x^2} \leq a - x$.

4.7.4. а) $\sqrt{ax} \geq x + 1$; б) $\sqrt{2x+a} \geq x$;

в) $\sqrt{x^2+x-a} \geq a-2$.

4.7.5. а) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} < a$; б) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} < a$;

в) $\sqrt{a+x} + \sqrt{x} < a$.

4.7.6. Используя графический метод, решите неравенство:

а) $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2ax-x^2} > a$; б) $\sqrt{2ax-x^2} \geq a - x$.

4.7.7. Для каждого значения параметра a найдите все решения данного неравенства.

а) $\sqrt{\dfrac{x+a}{a-x}} + \sqrt{\dfrac{a-x}{x+a}} \geq 2$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \geq \dfrac{a}{\sqrt{x}}$.

§ 4.8. Показательные и логарифмические уравнения

Простейшее показательное уравнение

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. При $b \leq 0$ оно не имеет корней, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Решение произвольного показательного уравнения часто сводится к решению простейших. Для этого применяют многие из описанных ранее методов: разложение на множители, замена переменной и т.д.

Многие показательные уравнения решаются приведением обеих частей к одному основанию с использованием в дальнейшем свойства монотонности показательной функции. В частности, при $a > 0$ и $a \neq 1$ уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Уравнение вида $f(a^x) = 0$ заменой $t = a^x$, где $t > 0$, сводится к уравнению $f(t) = 0$, а далее – к решению совокупности уравнений $a^x = t_1, \ldots,$ $a^x = t_k$, где $t_1, \ldots, t_k$ – все положительные корни уравнения $f(t) = 0$.

Пример 1. *При каких значениях параметра* p *имеет единственное решение уравнение:*

а) $|2^x - p| = 4$; б) $p \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$?

а) ***Решение.*** Полагая $2^x = y$, где $y > 0$, получим

$$|y - p| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - p > 0, \\ y = 4 + p, \\ y > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y - p < 0, \\ y = p - 4, \\ y > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 + p > p, \\ y = p + 4, \\ p + 4 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p - 4 < p, \\ y = p - 4, \\ p - 4 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 > 0, \\ y = p + 4, \\ p > -4, \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < 0, \\ y = p - 4, \\ p > 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система имеет решение при $p > -4$. Вторая – при $p > 4$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение, если имеет решение только первая система совокупности.

Ответ. $-4 < p \leq 4$.

б) ***Решение.*** Выполним замену $2^x = y$, тогда исходное уравнение преобразуется к виду $py + 1/y = 5$ или $py^2 - 5y + 1 = 0$. Так как $y > 0$, то данное уравнение имеет единственное решение, если квадратный трехчлен $f(y) = py^2 - 5y + 1$ имеет один положительный корень. Это возможно в следующих случаях, если (см. задачу 1 §2.3 гл. 2 на стр. 33):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0) < 0, \\ p > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(0) > 0, \\ D = 0, \\ x_0 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(0) > 0, \\ p < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0) = 1 < 0, \\ p > 0, \end{cases} \Rightarrow \varnothing; \\ \begin{cases} f(0) > 0, \\ D = 0, \\ x_0 > 0, \end{cases} \Rightarrow p = 25/4; \\ \begin{cases} f(0) = 1 > 0, \\ p < 0; \end{cases} \Rightarrow p < 0; \end{array}\right. \Rightarrow p < 0 \text{ и } p = 25/4.$$

При $p = 0$ уравнение $py^2 - 5y + 1 = 0$ не является квадратным и имеет единственный корень $y = 1/5$.

Ответ. Единственное решение будет при $p \le 0$ и $p = 25/4$.

Пример 2. *При каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение уравнение*:

а) $|b^x - a| = 3;\ (b > 0)$;   б) $2^{|x|+a} - 2^{|x|} = 5$.

а) ***Решение***. Положим $b^x = y > 0$, тогда получим

$$|y - a| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - a > 0, \\ y = 3 + a; \end{cases} \\ \begin{cases} y - a < 0, \\ y = a - 3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > a, \\ y = 3 + a; \end{cases} \\ \begin{cases} y < a, \\ y = a - 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система имеет решение, если $3 + a > 0$, т.е. при $a > -3$. Вторая система имеет решение, если $a - 3 > 0$, т.е. при $a > 3$. Следовательно, для того чтобы уравнение $|b^x - a| = 3$ имело хотя бы одно решение достаточно, чтобы имела решение хотя бы одна система совокупности.

Ответ. $a > -3$.

б) ***Решение.*** Выразим $2^{|x|}$ из уравнения (так как $|x| \ge 0$, то $2^{|x|} \ge 1$. Тогда уравнение преобразуется к виду $2^{|x|}(2^a - 1) = 5$. Так как $2^a - 1 \ne 0$ или $a \ne 0$ (иначе при $a = 0$ исходное уравнение имеет вид $0 \cdot 2^{|x|} = 5$), то $2^{|x|} = \dfrac{5}{2^a - 1}$.

Полученное уравнение имеет решение, если его правая часть удовлетворяет неравенству $\dfrac{5}{2^a - 1} \ge 1$, поскольку множество значений функции $y = 2^{|x|}$, стоящей в левой части уравнения $E_y = [1; +\infty)$. Знаменатель $2^a - 1$ должен быть положительным; в противном случае неравенство не выполняется, поэтому получаем двойное неравенство $1 < 2^a \le 6$, справедливое при $0 < a \le \log_2 6$.

Ответ. $0 < a \le \log_2 6$.

Пример 3. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}.$$

Решение. Произведя замену $4^{x-2} = y$, где $y > 0$, получим линейное уравнение

$$3y + 27 = a(1 + y) \text{ или } (a - 3)y = 27 - a.$$

При $a = 3$ это уравнение не имеет решений. Если $a \ne 3$, то $y = \dfrac{27 - a}{a - 3}$.

Из условия $y > 0$ следует неравенство $\dfrac{27 - a}{a - 3} > 0$, которое справедливо при $a \in (3; 27)$. При этих значениях a из уравнения $4^{x-2} = \dfrac{27 - a}{a - 3}$ находим $x = \log_4 \dfrac{27 - a}{a - 3} + 2$.

Ответ. Если $a \in (3; 27)$, то $x = \log_4 \dfrac{27 - a}{a - 3} + 2$;
если $a \notin (3; 27)$, то решений нет.

Простейшие логарифмические уравнения

(1) Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0,\ a \neq 1$, имеет единственный корень $x = a^b$. В общем случае:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

(2) Уравнение вида $\log_x A = B$, где $A > 0$, при $A \neq 1,\ B \neq 0$ имеет единственный корень $x = A^{1/B}$; при $A = 1,\ \ B = 0$ его решением является любое отличное от единицы положительное число; при $A = 1$ и $B \neq 0$ оно не имеет решений.

(3) В уравнениях вида $f(\log_a x) = 0$, $a > 0,\ a \neq 1$ производят замену $\log_a x = t$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\log_a x = t_k$, где $t_1, \ldots, t_k$ – все корни уравнения $f(t) = 0$.

Аналогично, для уравнений вида $f(\log_x A) = 0$, $A > 0$ производят замену $\log_x A = t$.

(4) Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0,\ a \neq 1$ равносильно одной из следующих систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

(5) Аналогично, уравнение $\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A$, $A > 0$ равносильно одной из следующих систем

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a - x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$$

Решение. Находим ОДЗ: $a > 0,\ a \neq 1$, $2a - x > 0$ и $x > 0$.

Приведем уравнение к виду $2\log_a \dfrac{\sqrt{2a - x}}{a} + \log_a x = 0$ или

$$\log_a (2a - x) - 2 + \log_a x = 0 \Leftrightarrow \log_a (2ax - x^2) = 2 \Leftrightarrow 2ax - x^2 = a^2.$$

Из последнего уравнения получаем $(x-a)^2 = 0$ или $x = a$.

Ответ. Если $a \le 0,\ a = 1$, то решений нет;

если $a > 0,\ a \ne 1$, то $x = a$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$\log_a x + \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = 11.$$

Решение. Учтем, что $a > 0,\ a \ne 1$ и $x > 0$. Переходя в данном уравнении к одному основанию a, получим

$$\log_a x + \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{3}\log_a x = 11 \text{ или } \frac{11}{6}\log_a x = 11.$$

Из уравнения $\log_a x = 6$ получаем $x = a^6$. С учетом ограничений на a, запишем ответ.

Ответ. Если $a \le 0,\ a = 1$ решений нет;

если $a > 0,\ a \ne 1$, то $x = a^6$.

Основные методы решения показательных и логарифмических уравнений

При решении показательных и логарифмических уравнений часто применяются потенцирование или логарифмирование уравнения.

Потенцирование – переход от уравнения

$\log_{\varphi(x,a)} f(x,a) = \log_{\varphi(x,a)} g(x,a)$ к уравнению $f(x,a) = g(x,a)$.

При этом преобразовании могут появиться лишние корни.

Логарифмирование – переход от уравнения

$f(x,a) = g(x,a)$ к уравнению $\log_{\varphi(x,a)} f(x,a) = \log_{\varphi(x,a)} g(x,a)$.

Это преобразование, которое может привести к потере корней.

Рассмотрим типичные схемы решения показательных уравнений логарифмированием.

1. $b_1^{f_1(x,a)} = b_2^{f_2(x,a)} \Leftrightarrow f_1(x,a)\log_c b_1 = f_2(x,a)\log_c b_2$,

   где $0 < b_1, b_2 \ne 1$ и $0 < c \ne 1$.

2. $b^{f_1(x,a)} = b^{f_2(x,a)} \Leftrightarrow f_1(x,a) = f_2(x,a)$, где $0 < b \ne 1$.

В случае, когда основания являются функциями от x, имеем:

3. $\begin{cases} g_1(x,a)^{f_1(x,a)} = g_2(x,a)^{f_2(x,a)}, \\ g_1(x,a) > 0, \\ g_2(x,a) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,a)\log_c g_1(x,a) = \\ \qquad = f_2(x,a)\log_c g_2(x,a), \\ g_1(x,a) > 0, \\ g_2(x,a) > 0, \\ 0 < c \neq 1. \end{cases}$

Замечание. При решении показательных уравнений с параметром необходимо учитывать случай, когда основание равно 1. Случай, когда основание отрицательно, хотя выражение $a^{f(x)}$ имеет смысл, если $f(x)$ – целое число, рассматривать не следует, исходя из определения показательной функции.

Пример 6. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{2x} = 1.$$

Решение. Имеем $a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{2x} = 1 \Leftrightarrow a^{2x-3}(a^3 - a + 1) = 1$. Если $a = 1$, то x может принимать любое действительное значение. Если $a > 0,\ a \neq 1$, то $a^3 - a + 1 > 0$, поскольку при $0 < a < 1$ слагаемое a^3 положительно и $-a + 1 > 0$, а при $a > 1$ имеем $a^3 > a$. Отсюда следует, что $x = (3 - \log_a(a^3 - a + 1))/2$.

Ответ. Если $a = 1$, то $x \in \mathbb{R}$;
если $a > 0,\ a \neq 1$, то $x = (3 - \log_a(a^3 - a + 1))/2$.

Пример 7. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Находим ОДЗ: $a \neq -2,\ x \neq 0$. Приведем уравнение к виду

$$2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 2^{\frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}} \text{ или } 2^{\frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)}} = 2^{\frac{2}{x}}.$$

Последнее равенство возможно только при равенстве степеней $\frac{a+3}{a+2} + \frac{5}{x(a+2)} = \frac{2}{x}$. Это уравнение на ОДЗ сводится к уравнению $(a+3)x + 5 = 2(a+2)$. Тогда, если $a + 3 \neq 0$, то $x = \frac{2a-1}{a+3}$; если

$a=-3$, то решений нет. Исключим также значения параметра a, при которых $x=\dfrac{2a-1}{a+3}=0$, т.е. $a=0,5$.

Ответ. Если $a\in\{-3;-2;0,5\}$, то решений нет; $x=\dfrac{2a-1}{a+3}$ при других значениях параметра a.

Пример 8. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}} x-3.$$

Решение. Учтем, что $a>0,\ a\neq 1$ и $x>0,\ x\neq 1$. Приведем уравнение к виду

$$(3\log_a x-2)\frac{1}{\log_a^2 x}=2\log_a x-3.$$

Положим $\log_a x=y$; тогда уравнение примет вид $(3y-2)\dfrac{1}{y^2}=2y-3$ или $2y^3-3y^2-3y+2=0$. Последнее уравнение раскладывается на множители $(y-1)(2y^2-5y+2)=0$ и имеет корни $y_1=-1$, $y_2=2$, $y_3=0,5$. Откуда $x_1=1/a$, $x_2=a^2$, $x_3=\sqrt{a}$.

Ответ. При $a\le 0$ и $a=1$ решений нет; если $a>0,\ a\neq 1$, то $x_1=1/a$, $x_2=a^2$, $x_3=\sqrt{a}$.

Пример 9. *Найти все значения параметра* a*, для которых уравнение* $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$ *имеет решение.*

Решение. ОДЗ уравнения: $x>0,\ a>0,\ a\neq 1$. Перейдем в данном уравнении к одному основанию 2. Имеем

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 a}+\frac{1}{2}\log_2 x=1$$

или

$$\left(1+\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{2}\right)\cdot\log_2 x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3\log_2 a+2}{2\log_2 a}\right)\cdot\log_2 x=1.$$

При $\dfrac{3\log_2 a+2}{2\log_2 a}\neq 0$ получим $\log_2 x=\dfrac{2\log_2 a}{3\log_2 a+2}$. При любом значении правой части найдется значение x, при котором выполняется равенство.

$\dfrac{3\log_2 a+2}{2\log_2 a}=0$, если $3\log_2 a+2=0$, т.е. при $a=2^{-2/3}$.

Следовательно, исходное уравнение не имеет решения при $a<0,\ \ a=1$ и $a=2^{-2/3}$. ***Ответ.*** При $a\in(0;2^{-2/3})\cup(2^{-2/3};1)\cup(1;+\infty)$.

Пример 10. *Найти все значения* a*, при которых уравнение* $\log_a x+\log_{\sqrt{x}} a\cdot\left|a+\log_a x\right|\ =a\log_x a$ *имеет решение, и найти его.*

Решение. Находим ОДЗ уравнения $x>0,\ x\neq 1$ и $a>0,\ a\neq 1$.

Перейдем в уравнении к основанию a:

$$\log_a x+\frac{2}{\log_a x}\cdot\left|a+\log_a x\right|\ =\frac{a}{\log_a x}.$$

При замене $\log_a x=y$ получим $y+\dfrac{2}{y}\cdot\left|a+y\right|\ =\dfrac{a}{y}$ или

$$y^2+2\,|\,a+y\,|-a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+y\geq 0,\\ y^2+2y+a=0,\end{cases}\\ \begin{cases}a+y<0,\\ y^2-2y-a=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a x\geq -a,\\ \log_a x=-1\pm\sqrt{1-a},\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a x<-a,\\ \log_a x=1\pm\sqrt{1+3a}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система совокупности имеет решение при выполнении условий $1>a>0$ и $-1-\sqrt{1-a}\geq -a$ или $-1+\sqrt{1-a}\geq -a$. При $1>a>0$ неравенство $-1-\sqrt{1-a}\geq -a$ не выполняется, а неравенство $-1+\sqrt{1-a}\geq -a$ или $\sqrt{1-a}>1-a$ является справедливым. Следовательно, решением исходного уравнения является $x=a^{-1+\sqrt{1-a}}$.

Вторая система совокупности имеет решение при выполнении условий $a>0$ и $1-\sqrt{1+3a}<-a$ или $1+\sqrt{1+3a<}>-a$. При $a>0$ неравенство $1+\sqrt{1+3a}<-a$ или $\sqrt{1+3a}<-1-a$ не выполняется, а неравенство $1-\sqrt{1+3a}<-a$ или $\sqrt{1+3a}>1+a$ справедливо только при $0<a<1$. Следовательно, $x=a^{1-\sqrt{1+3a}}$ – решение исходного уравнения.

Ответ. Если $0<a<1$, то $x_1=a^{-1+\sqrt{1-a}}$ и $x_2=a^{1-\sqrt{1+3a}}$.

Пример 11. *Определить значения параметра* a*, при которых уравнение* $2\lg(x+3)=\lg(ax)$ *имеет единственный корень, и найти его.*

Решение. Находим ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x+3>0, \\ ax>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ ax>0. \end{cases}$

Заменим на ОДЗ уравнение равносильной ему системой:

$$\lg(x+3)^2=\lg(ax) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2=ax, \\ x>-3, \\ ax>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(6-a)x+9=0, \\ x>-3, \\ ax>0. \end{cases}$$

Дискриминант уравнения $x^2+(6-a)x+9=0$ равен $D=a^2-12a$. $D\ge 0$ при $a\in(-\infty;0]\cup[12;+\infty)$. При этих значениях a уравнение имеет корни $x_1=\dfrac{(a-6)-\sqrt{a^2-12a}}{2}$ и $x_2=\dfrac{(a-6)+\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Если $a>12$, то уравнение имеет два различных корня, удовлетворяющие ОДЗ. Если $a=12$, уравнение имеет корень $x=-9$.

Если $a<0$, то уравнение имеет два различных корня. Корень $x_1<-3$, поэтому является посторонним для исходного уравнения. Проверим, что корень x_2 удовлетворяет ОДЗ, т.е. $-3<x_2<0$:

$$\begin{cases} -3<\dfrac{(a-6)+\sqrt{a^2-12a}}{2}, \\ \dfrac{(a-6)+\sqrt{a^2-12a}}{2}<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2-12a}>-a, \\ \sqrt{a^2-12a}<6-a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12a>a^2, \\ a^2-12a<36-12a+a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12a>0, \\ 0<36; \end{cases} \Leftrightarrow a<0$$

Ответ. Если $a=12$, то $x=-9$;

если $a<0$, то $x=\dfrac{(a-6)+\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.8.1. Найдите все значения параметра p, при которых имеет хотя бы одно решение уравнение:

а) $(p+1)\cdot 4^x+4\cdot 2^x+p-2=0$;

б) $(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 6^x+(p+2)\cdot 9^x=0$.

4.8.2. Найдите все значения параметра p, при которых не имеет решений уравнение:

а) $(p-4)\cdot 9^x+(p+1)\cdot 3^x+2p-1=0$;

б) $(10-p)\cdot 5^{2x+1}-2\cdot 5^{x+1}+6-p=0$.

4.8.3. При каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение уравнение:

а) $2^x+2^{2-x}=a$; б) $4^x+a\cdot 2^x=1$;

в) $x^2-2x-\log_{1/3}a^2=0$; г) $x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$?

4.8.4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение:

а) $\log_3(9^x+9a^3)=x$ имеет два решения;

б) $\log_{x+a}(x-2)=2$ имеет единственное решение;

в) $\lg(x^2+2ax)=\lg(8x-6a-3)$ имеет единственное решение.

4.8.5. В зависимости от значений параметра a определите число решений уравнения:

а) $2x\lg x=3-a\lg x$; б) $\sqrt[4]{x+a}+\log_5(x-5a)=0$.

В задачах 4.8.6. – 4.8.9. при всех допустимых значениях параметра a решите уравнения:

4.8.6. а) $\log_a(x^2-3a)=\log_a(a^2-3x)$;

б) $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+a)=\log_{\sqrt{2-x}}(\sqrt{2-x})^4$;

в) $\log_{a^2-x^2}\left[(ax)^2-1\right]=1$.

4.8.7. а) $a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a=0$; б) $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$;

в) $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$.

4.8.8. а) $\log_a x+\log_a(x-1)=2$; б) $\log_{a^2} x+\log_{x^2} a=1$;

в) $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0$.

4.8.9. а) $x^{\log_a x}=a^2x$; б) $a^{\log_a^4 x}+x^{\log_a^3 x}=2a$.

4.8.10. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_{x+a^2+1}(a^2x+2)=2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$$

при любом значении параметра a.

4.8.11. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений:

а) $\begin{cases}3^{2x+y}+3^{x+3y}=3,\\ 3^y+3^{-3x-3y}=3^{a-2x}\end{cases}$ имеет решение;

б) $\begin{cases}2^{x+y}-2^{2x-y}=1-2^a,\\ 2^{4x}-2^{x+3y+1}=3\cdot 2^{a+2y}-2^{2y+2}\end{cases}$ имеет единственное решение.

4.8.12. Найдите все значения параметра a, при которых данная система уравнений имеет ровно два решения.

а) $\begin{cases}\log_2(3-x+y)+3=\log_2(25-6x+7y),\\ y+2=(x-2a)^2+a+2x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_3(2-x-y)+2=\log_3(17-8x-10y),\\ (x-a)^2+x=y+a+6.\end{cases}$

4.8.13. Определите, при каких значениях параметра a данное уравнение имеет, по крайней мере, два корня.

а) $\log_{a+1} x+\log_x(19-8a)=2$; б) $\log_a x+\log_x(17-10a)=2$.

§ 4.9. Логарифмические и показательные неравенства

Многие из перечисленных ранее методов решения неравенств применяются и к логарифмическим и показательным неравенствам: разложение на множители; замена переменной и т. д.

Если в неравенствах удается все выражения свести к одному основанию, то можно воспользоваться следующими эквивалентностями:

$$a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (9.1)$$

и

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0, \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array} \right. \qquad (9.2)$$

Пример 1. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $a^{x^2-x} < 1$.

Решение. Исходя из определения показательной функции, рассматриваем только значения $a > 0$. При $a = 1$ решений нет. При $a > 0$:

$$a^{x^2-x} < 1 \Leftrightarrow a^{x^2-x} < a^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x < 0, \\ a > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ. При $a \le 0$, $a = 1$ решений нет;
если $0 < a < 1$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
если $a > 1$, то $x \in (0; 1)$.

Пример 2. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_a(1+x)<1$.

Решение. Находим ОДЗ: $a>0,\ a\neq 1$; $x>-1$. На ОДЗ имеем

$$\log_a(1+x)<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1+x>0, \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1+x>a, \\ 0<a<1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1>x>-1, \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>a-1, \\ 0<a<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. При $a\leq 0,\ a=1$ решений нет;
если $0<a<1$, то $x\in(a-1;+\infty)$;
если $a>1$, то $x\in(-1;a-1)$.

Пример 3. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_a(x^2+2x)<0$.

Решение. Находим ОДЗ: $a>0,\ a\neq 1$; $x^2+2x>0$. На ОДЗ имеем

$$\log_a(x^2+2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1>x^2+2x>0, \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x>1, \\ 0<a<1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2>x>-1-\sqrt{2}, \\ -1+\sqrt{2}>x>0, \end{array}\right. \\ a>1, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1-\sqrt{2}>x, \\ x>-1+\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ 0<a<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. При $a\leq 0$ или $a=1$ решений нет;
если $0<a<1$, то $x\in(-\infty;\ -1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};\ +\infty)$;
если $a>1$, то $x\in(\ -1-\sqrt{2};-2)\cup(0;-1+\sqrt{2})$.

Пример 4. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_a(x^2+2x)>1$.

Решение. Найдем ОДЗ $a>0,\ a\neq 1$; $x^2+2x>0$. На ОДЗ получаем:

$$\log_a(x^2+2x)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x>a,\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2x<a,\\ x^2+2x>0,\\ 0<a<1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x-a>0,\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+2x-a<0,\\ x^2+2x>0,\\ 0<a<1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>-1+\sqrt{1+a},\\ x<-1-\sqrt{1+a},\end{array}\right.\\ a>1,\end{cases}\\ \begin{cases}-1-\sqrt{1+a}<x<-1+\sqrt{1+a},\\ \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ x>0,\end{array}\right.\\ 0<a<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. При $a \le 0$, $a=1$ решений нет;

если $0<a<1$, то $x \in (\,-1-\sqrt{1+a};-2) \cup (0;-1+\sqrt{1+a})$;

если $a>1$, то $x \in (\,-\infty;-1-\sqrt{1+a}) \cup (-1+\sqrt{1+a};+\infty)$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра а решить неравенство* $\log_{x^2}(x+a)<1$.

Решение. Находим ОДЗ: $x+a>0,\ x \ne \pm 1,\ x \ne 0$. На ОДЗ имеем

$$\log_{x^2}(x+a)<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2>x+a>0,\\ x^2>1,\end{cases}\\ \begin{cases}x+a>x^2,\\ 0<x^2<1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x+a>0,\\ x+a>0,\\ |x|>1,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-a<0,\\ 0<|x|<1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Числа $x_1=(1-\sqrt{1+4a})/2$ и $x_2=(1+\sqrt{1+4a})/2$ – корни уравнения $x^2-x-a=0$ при $a>-1/4$.

При $a<-1/4$ неравенство справедливо при всех x.

Для первой системы совокупности получим:

$$\begin{cases} x^2 - x + a > 0, \\ x + a > 0, \\ |x| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -a, \\ x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Убеждаемся, что на числовой оси Ox значение $x = -a$ для всех $a \neq 0$ расположено левее, чем x_1; при $a > 0$ значение x_2 больше $x = 1$; при $a > 2$ значение x_1 меньше $x = -1$. Запишем решение первой системы: если $a < -1/4$, то решений нет; если $-1/4 \leq a < 0$, то $x \in (1; +\infty)$; если $0 \leq a < 1$, то $x \in \left(x_2; +\infty\right)$; если $1 \leq a < 2$, $x \in (-a; -1) \cup (x_2; +\infty)$, если $a \geq 2$, то $x \in (-a; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Для второй системы совокупности имеем:

$$\begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ x^2 - x - a < 0, \\ x + a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 0) \cup (0; 1), \\ x_1 < x < x_2, \\ x \geq -a. \end{cases}$$

По аналогии с предыдущим случаем получаем, что если $a < -1/4$, то решений нет; если $-1/4 \leq a < 0$, то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, если $0 \leq a < 2$, то $x \in (x_1; 1)$; если $a \geq 2$, то $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Ответ исходного неравенства является объединением ответов полученных систем.

Ответ. Если $a < -1/4$, то решений нет; если $-1/4 \leq a < 0$, то $x \in ((1 - \sqrt{1 + 4a})/2;\ (1 + \sqrt{1 + 4a})/2) \cup (1; +\infty)$; если $0 \leq a < 1$, то $x \in (-\infty; (1 - \sqrt{1 + 4a})/2) \cup ((1 + \sqrt{1 + 4a})/2; +\infty)$; если $1 \leq a < 2$, то $x \in (-a; -1) \cup ((1 - \sqrt{1 + 4a})/2; 1) \cup ((1 + \sqrt{1 + 4a})/2; +\infty)$; если $a \geq 2$, то $x \in (-a; (1 - \sqrt{1 + 4a})/2) \cup (-1; 1) \cup ((1 + \sqrt{1 + 4a})/2; +\infty)$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_a(x - 2) + \log_a x > 1$.

Решение. В соответствии с определением логарифмической функции, $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 2$. Следовательно,

$$\log_a(x-2)+\log_a x>1 \Rightarrow \log_a x(x-2)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ x^2-2x>a,\\ x>2,\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x^2-2x<a,\\ x>2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. Если $a \le 0,\ a=1$ решений нет;

если $0<a<1$, то $x \in (2;1+\sqrt{1+a})$;

если $a>1$, то $x \in (1+\sqrt{1+a};+\infty)$.

Пример 6. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_a(x-1)+\log_a x>2$.

Решение. Найдем ОДЗ: $a>0,\ a\ne 1,\ x>1$. Имеем

$$\log_a(x-1)+\log_a x>2 \Rightarrow \log_a x(x-1)>2 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ x^2-x>a^2,\\ x>1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ x^2-x<a^2,\\ x>1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1,\\ \left[\begin{array}{l}x<(1-\sqrt{1+4a^2})/2,\\ x>(1+\sqrt{1+4a^2})/2,\end{array}\right.\\ x>1,\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1,\\ (1-\sqrt{1+4a^2})/2<x<(1+\sqrt{1+4a^2})/2,\\ x>1.\end{cases}\end{array}\right.$$

С учетом того, что число $(1+\sqrt{1+4a^2})/2$ при всех значениях $a\ne 0$ больше 1, а $(1-\sqrt{1+4a^2})/2$ – меньше 1, запишем ответ.

Ответ. Если $a\le 0$, $a=1$, то решений нет;

если $0<a<1$, то $x\in(1;(1+\sqrt{1+4a^2})/2)$;

если $a>1$, то $x\in((1+\sqrt{1+4a^2})/2;+\infty)$.

Пример 7. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $3^{\sqrt{x}} > 2^{a}$.

Решение. Перейдем в неравенстве к одному основанию 2: $3^{\sqrt{x}} = 2^{\log_2 3^{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow 2^{\log_2 3^{\sqrt{x}}} > 2^{a}$. Далее логарифмируя, получаем

$$\log_2 3^{\sqrt{x}} > a \Leftrightarrow \sqrt{x}\log_2 3 > a \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{a}{\log_2 3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ x > a^2 \log_3^2 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если $a \geq 0$, то $x \in (a^2 \log_3^2 2; +\infty)$;
если $a < 0$, то $x \in [0; +\infty)$.

Пример 8. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $\frac{1}{\log_a x} > 1$.

Решение. Находим ОДЗ: $a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0, x \neq 1$. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{1 - \log_a x}{\log_a x} > 0.$$

Полагая $y = \log_a x$, где $y \neq 0$, получим неравенство $\frac{1-y}{y} > 0$ или $0 < y < 1$, т.е. $0 < \log_a x < 1$.

Решим полученное неравенство

$$0 < \log_a x < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ a < x < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 < x < a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $x \in (a; 1)$;
если $a \geq 1$, то $x \in (1; a)$.

Пример 9. *Для каждого значения параметра* a *решить неравенство* $x^{\log_a x} < a$.

Решение. Найдем ОДЗ: $a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0$. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством $x = a^{\log_a x}$. Тогда неравенство примет вид $\left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a x} < a$ или

$$a^{\log_a^2 x} < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a^2 x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ \log_a^2 x < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ |\log_a x| > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ |\log_a x| < 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x \in (0;a) \cup (1/a;+\infty); \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ x \in (1/a;a). \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $x \in (0;a) \cup (1/a;+\infty)$;

если $a > 1$, то $x \in (1/a;a)$.

Пример 10. *Найти все действительные значения параметра* a, *при которых каждое решение неравенства* $\log_{1/2} x^2 \geq \log_{1/2}(x+2)$ *является решением неравенства* $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

Решение. Найдем ОДЗ первого неравенства: $x > -2;\ x \neq 0$.

Решим первое неравенство:

$$\log_{1/2} x^2 \geq \log_{1/2}(x+2) \Leftrightarrow x^2 \leq x+2 \Rightarrow x \in [-1;2].$$

Решим второе неравенство:

$$49x^2 - 4a^4 \leq 0 \Leftrightarrow 49x^2 \leq 4a^4 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{2a^2}{7}.$$

Для того, чтобы каждое решение первого неравенства было решением второго неравенства, необходимо и достаточно, чтобы отрезок $x \in [-1;2]$ содержался в отрезке $-\frac{2a^2}{7} \leq x \leq \frac{2a^2}{7}$.

Из симметрии второго отрезка относительно нуля следует, что для этого достаточно решить неравенство $2 \leq \frac{2a^2}{7}$. Отсюда получаем $|a| \geq \sqrt{7}$.

Ответ. $a \in (-\infty;-\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7};+\infty)$.

Пример 11. *Решить неравенство, если известно, что оно выполняется при* $x = x_0$*:* $\log_a(x^2-3x) > \log_a(4x-x^2)$, $x_0 = 3{,}75$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} a>0,\ a\neq 1, \\ x^2-3x>0, \\ 4x-x^2>0; \end{cases} \Rightarrow\ x\in(3;4)$.

Подставив в неравенство значение $x_0 = 3{,}75$, получим

$\log_a\left(\frac{225}{16}-\frac{45}{4}\right) > \log_a\left(15-\frac{225}{16}\right)$ или $\log_a\left(\frac{45}{16}\right) > \log_a\left(\frac{15}{16}\right)$.

Последнее неравенство может выполняться только при значениях a, больших 1. Тогда для исходного неравенства имеем

$\log_a(x^2-3x) > \log_a(4x-x^2) \Leftrightarrow x^2-3x > 4x-x^2$, т.е. $2x^2-7x>0$.

Учитывая ОДЗ, получаем решение $x\in(3{,}5;4)$.

Ответ. $x\in(3{,}5;4)$.

Пример 12. *Найти все действительные значения параметра* a*, при которых неравенство* $\log_{a+x}|x(a-x)| < \log_{a+x} x$ *имеет хотя бы одно решение.*

Решение. Находим ОДЗ: $\begin{cases} a+x>0, \\ a+x\neq 1, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-a, \\ x\neq 1-a, \\ x>0. \end{cases}$

$$\log_{a+x}|x(a-x)| < \log_{a+x} x \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{a+x} x + \log_{a+x}|a-x| < \log_{a+x} x \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{a+x}|a-x| < 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+x>1, \\ 0<|a-x|<1, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a+x<1, \\ |a-x|>1; \end{cases} \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1-a, \\ 0<|a-x|<1, \end{cases} \\ \begin{cases} -a<x<1-a, \\ |a-x|>1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему неравенств полученной совокупности:

$$\begin{cases} x > 1-a, \\ 0 < |a-x| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1-a, \\ x \neq a, \\ a-1 < x < a+1. \end{cases}$$

Система имеет хотя бы одно решение, если $a+1<1-a$, т.е. при $a<0$.

Рассмотрим вторую систему неравенств совокупности:

$$\begin{cases} -a < x < 1-a, \\ |a-x| > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < 1-a, \\ \left[\begin{array}{l} a-x > 1, \\ a-x < -1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a < x < 1-a, \\ \left[\begin{array}{l} x < a-1, \\ x > a+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Система имеет хотя бы одно решение, если имеет решение совокупность $\left[\begin{array}{l} a-1 > -a, \\ a+1 > 1-a; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0,5, \\ a > 0, \end{array}\right.$ т.е. при $a>0$.

При $a=0$ неравенство приводится к виду $\log_x x^2 < \log_x x$ или $2<1$, т.е. не имеет решения.

Ответ. $a \neq 0$.

Пример 13. *Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство $1+\log_2(2x^2+2x+3,5) \geq \log_2(ax^2+a)$ имеет хотя бы одно решение.*

Решение. Находим ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+2x+3,5>0, \\ ax^2+a>0 \end{cases} \Rightarrow a>0$.

Преобразуем исходное неравенство:

$$1+\log_2(2x^2+2x+3,5) \geq \log_2(ax^2+a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(4x^2+4x+7) \geq \log_2(ax^2+a).$$

Потенцируя (с учетом ОДЗ), получаем двойное неравенство

$$4x^2+4x+7 \geq ax^2+a>0.$$

Решим неравенство

$$4x^2+4x+7 \geq ax^2+a \text{ или } (4-a)\ x^2+4x+7-a \geq 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $(4-a)x^2+4x+7-a$: $D=16-4(4-a)(7-a)=-4a^2+44a-96$. Квадратичное неравенство имеет хотя бы одно решение в случае выполнения условий

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-a>0,\\ D<0,\end{cases}\\ D\ge 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4>a,\\ a\in(-\infty;3)\cup(8;+\infty),\end{cases}\\ a\in[3;8].\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $a \in (0;8]$.

Ответ. $a \in (0;8]$.

Пример 14. *Найти все действительные значения параметра* a, *при которых неравенство* $1-\log_{1/7}(x^2+1) \ge \log_7(ax^2+4x+a)$ *справедливо для всех действительных значений* x.

Решение. Находим ОДЗ: $ax^2+4x+a>0$.

Преобразуем исходное неравенство

$$1-\log_{1/7}(x^2+1) \ge \log_7(ax^2+4x+a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7 7(x^2+1) \ge \log_7(ax^2+4x+a).$$

Потенцируя неравенство с учетом ОДЗ, получаем двойное неравенство

$$7x^2+7 \ge ax^2+4x+a>0.$$

Рассмотрим неравенство $7x^2+7 \ge ax^2+4x+a$ или

$$(a-7)x^2+4x+(a-7) \le 0 \ (*).$$

Его дискриминант D_1 равен $D_1=-4a^2+56a-180$.

Дискриминант неравенства $ax^2+4x+a>0$ (**) равен $D_2=16-4a^2$. Исходное неравенство будет справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$, если оба неравенства (*) и (**) выполняются при всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. если

$$\begin{cases}a-7<0,\\ a>0,\\ D_1\le 0,\\ D_2<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<7,\\ a>0,\\ -4a^2+56a-180\le 0,\\ 16-4a^2<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<7,\\ a>0,\\ a\in(-\infty;5]\cup[9;+\infty),\\ a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty).\end{cases}$$

Ответ. $a \in (2;5]$.

Пример 15. *Найти все значения параметра* a *, при которых неравенство* $a9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$ *справедливо для всех* $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Сделаем замену $y = 3^x$, где $y > 0$. Тогда получим неравенство $ay^2 + 4(a-1)y + a > 1$. Исходное неравенство будет справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$, если полученное неравенство выполняется при всех $y > 0$. Это возможно, если для квадратного трехчлена

$$f(y) = ay^2 + 4(a-1)y + a - 1: \left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \le 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y_0 = -\dfrac{4(a-1)}{2a} \le 0, \\ f(0) = a - 1 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением последней совокупности является $a \ge 1$.

Ответ. $a \ge 1$.

Графический метод

Пример 16. *Для каждого возможного значения параметра* a *решить неравенство* $\log_{x^2}(a+x) \le 1/2$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\log_{x^2}(a+x) \le 1/2 \Leftrightarrow \log_{x^2}(a+x) \le \log_{x^2}|x| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ a + x \le |x|, \end{cases} \\ \begin{cases} |x| > 1, \\ a + x \ge |x|; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -a, \\ \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} -1 < x < 0, \\ a + x \le -x, \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a + x \le x, \end{cases} \\ (\mathrm{III})\begin{cases} x < -1, \\ a + x \ge -x; \end{cases} \\ (\mathrm{IV})\begin{cases} x > 1, \\ a + x \ge x; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -a, \\ \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I})\begin{cases} -1 < x < 0, \\ x \le -a/2, \end{cases} \\ (\mathrm{II})\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a \le 0, \end{cases} \\ (\mathrm{III})\begin{cases} x < -1, \\ x \ge -a/2; \end{cases} \\ (\mathrm{IV})\begin{cases} x > 1, \\ a \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

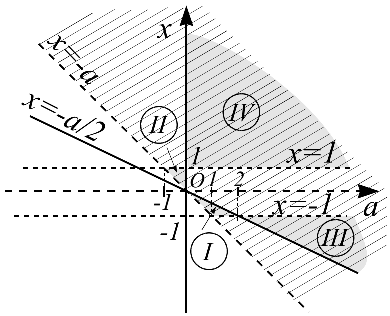


Рис. 61

Все решения исходного неравенства выделены на КП-плоскости (см. рис. 61). Используя рисунок, запишем ответ.

Ответ. Если $-1 < a < 0$, то $x \in (-a;1)$; если $a = 0$, то $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$; если $0 < a < 1$, то $x \in (-a;-a/2] \cup (1;+\infty)$; если $1 \le a < 2$, то $x \in (-1;-a/2] \cup (1;+\infty)$; если $a = 2$, то $x \in (1;+\infty)$; если $a > 2$, то $x \in [-a/2;-1) \cup (1;+\infty)$.

Метод разложения на множители

Пример 17. *При каждом значении параметра a решить неравенство* $2^{4x} + (x-4-a)2^{2x} + (5a+x-5-ax) \le 0$.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители. Сделаем замену $4^x = t$, где $t > 0$, и рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно переменной t:

$$P(t) = t^2 + (x-4-a)\cdot t + (a-1)(5-x).$$

Корнями $P(t)$ являются числа $t_1 = 5-x,\ t_2 = a-1$. Следовательно, $P(t) = (t-(5-x))\cdot(t-(a-1))$.

Сделаем обратную замену и запишем неравенство в виде

$$(4^x - (5-x))(4^x - (a-1)) \le 0.$$

Это неравенство равносильно совокупности систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} 4^x - (5-x) \le 0, \\ 4^x - (a-1) \ge 0; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 4^x - (5-x) \ge 0, \\ 4^x - (a-1) \le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4^x + x - 5$. Заметим, что $f(1) = 0$. Кроме того, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси, поэтому, $f(x) \le f(1)$ или $4^x + x - 5 \le 0$ для любого $x \le 1$ и

$f(x) \geq f(1)$ или $4^x + x - 5 \geq 0$ для любого $x \geq 1$. Следовательно, совокупность систем I и II равносильна совокупности систем:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ a \leq 4^x + 1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ a \geq 4^x + 1. \end{cases}$$

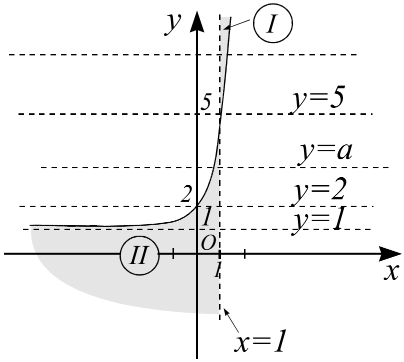


Рис. 62

На плоскости Oxy изобразим множество точек (см. рис. 62), координаты которых удовлетворяют полученной совокупности. На рисунке это множество заштриховано. Точки 1 и 5 разбили ось Oy на три участка, на каждом из которых легче выписывается решение нашего неравенства. Для этого на соответствующем участке проводим горизонтальную прямую $y = a$ и находим значения, соответствующие концам участков этой прямой, принадлежащих заштрихованной области. Абсциссу точки пересечения прямой $y = a$ и графика функции $y = 4^x + 1$ находим, решив уравнение $a = 4^x + 1$. Получаем $x = \log_4(a-1)$.

Ответ. Если $a \in (-\infty;1]$, то $x \in (-\infty;1]$; если $a \in (1;5)$, то $x \in [\log_4(a-1);1]$; если $a = 5$, то $x = 1$; если $a \in (5;+\infty)$, то $x \in [1;\log_4(a-1)]$.

Метод декомпозиции при решении логарифмических и показательных неравенств

Идея метода, предложенного в пособии[1] Моденова В.П., основана на замене трансцендентного неравенства равносильным ему в области допустимых значений переменной и параметров более простым, в частности, алгебраическим неравенством.

[1] Моденов В.П. Пособие по математике, ч. II. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1972.

Например, если F – элементарная трансцендентная функция, возрастающая в области допустимых значений переменной и параметров (ОДЗ) или на некотором множестве (М) из этой области, то

$$F(f_1(x,a)) - F(f_2(x,a)) > 0 \underset{\text{ОДЗ(М)}}{\Leftrightarrow} f_1(x,a) - f_2(x,a) > 0\,,$$

а если убывающая, то

$$F(f_1(x,a)) - F(f_2(x,a)) > 0 \underset{\text{ОДЗ(М)}}{\Leftrightarrow} f_1(x,a) - f_2(x,a) < 0\,.$$

Если функция $f(x,a)$ является рациональной, то полученные неравенства, равносильные исходному в ОДЗ(М), являются также рациональными.

Для решения неравенств, содержащих логарифмическую и сложно-показательную функции, можно использовать следующие логические схемы равносильных высказываний (в схемах знак $\vee$ означает любой из знаков $>,<,\geq,\leq$):

1. $\log_{g(x,a)} f_1(x,a) - \log_{g(x,a)} f_2(x,a) \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} f_1(x,a) - f_2(x,a) \vee 0$.

В частности,

а) $\log_{g(x,a)} f(x,a) \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (g(x,a)-1)(f(x,a)-1) \vee 0$,

где ОДЗ: $\begin{cases} 0 < g(x,a) \neq 1, \\ f(x,a) > 0. \end{cases}$

б) $\log_{g(x,a)} f(x,a) - 1 \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (g(x,a)-1)(f(x,a)-g(x,a)) \vee 0$,

где ОДЗ: $\begin{cases} 0 < g(x,a) \neq 1, \\ f(x,a) > 0. \end{cases}$

2. $g(x,a)^{f_1(x,a)} - g(x,a)^{f_2(x,a)} \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (g(x,a)-1)(f_1(x,a)-f_2(x,a)) \vee 0$.

В частности,

$g(x,a)^{f(x,a)} - 1 \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (g(x,a)-1) \cdot f(x,a) \vee 0$, где ОДЗ: $g(x,a) > 0$.

3. $g_1(x,a)^{f(x,a)} - g_2(x,a)^{f(x,a)} \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (g_1(x,a)-g_2(x,a)) \cdot f(x,a) \vee 0$,

где ОДЗ: $\begin{cases} g_1(x,a) > 0, \\ g_2(x,a) > 0. \end{cases}$

Приведенные «простейшие» неравенства называются ***базовыми неравенствами***, входящую в них трансцендентную функцию называют ***базовой***. Представление левой части неравенства $F \vee 0$ в виде произведения и частного базовых функций называют ***декомпозицией***.

Пример 18. *Доказать логическую схему*

$$\log_{g_1(x,a)} f(x,a) - \log_{g_2(x,a)} f(x,a) \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (f(x,a)-1)(g_1(x,a)-1)(g_2(x,a)-1)(g_2(x,a)-g_1(x,a)) \geq 0,$$

где ОДЗ: $\begin{cases} 0 < g_1(x,a) \neq 1, \\ 0 < g_2(x,a) \neq 1, \\ f(x,a) > 0. \end{cases}$

Доказательство. При $f(x,a)=1$ неравенство справедливо при выполнении условий, определяющих ОДЗ.

Пусть $f(x,a) \neq 1$. Представляя на ОДЗ левую часть исходного неравенства в виде произведения и частного базовых функций, получим:

$$\log_{g_1} f - \log_{g_2} f \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\log_f g_1} - \frac{1}{\log_f g_2} \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{\log_f g_2 - \log_f g_1}{\log_f g_1 \cdot \log_f g_2} \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{(f-1)(g_2-g_1)}{(f-1)(g_1-1)\cdot(f-1)(g_2-1)} \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{(f-1)(g_2-g_1)}{(g_1-1)(g_2-1)} \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (f-1)(g_1-1)(g_2-1)(g_2-g_1) \geq 0.$$

Объединяя результаты обоих случаев, получим требуемое.

Пример 19. *Для каждого допустимого значения параметра* a *решить неравенство* $\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 0 < 2a \neq 1, \\ \log_3 x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 0,5, \\ |x| > 1. \end{cases}$. Применяя метод декомпозиции дважды, получим:

$$\log_{2a}(\log_3 x^2) - 1 > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{2a}(\log_3 x^2) - \log_{2a}(2a) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (2a-1)(\log_3 x^2 - \log_3 3^{2a}) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (2a-1)(x-3^a)(x+3^a) > 0.$$

Для решения последнего неравенства достаточно рассмотреть два случая: (1) $a \in (0;0,5)$ и (2) $a \in (0,5;+\infty)$.

Если $a \in (0;0,5)$, то

$$(2a-1)(x-3^a)(x+3^a) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3^a)(x+3^a) < 0, \\ |x| > 1. \end{cases}$$

Или $x \in (-3^a;-1) \cup (1;3^a)$.

Аналогично, при $a \in (0,5;+\infty)$ получим $x \in (-\infty;-3^a) \cup (3^a;+\infty)$.

Ответ. Если $a \in (0;0,5)$, то $x \in (-3^a;-1) \cup (1;3^a)$;

если $a \in (0,5;+\infty)$, то $x \in (-\infty;-3^a) \cup (3^a;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Определите, при каких значениях параметра a имеет решение неравенство:

4.9.1. а) $a^2 - 2\cdot 4^{x+1} - a\cdot 2^{x+1} > 0$; б) $a^{x^2-2x} + a^{2x-x^2} \le 4$.

4.9.2. а) $\log_a(1+x) > \log_{a^2}(1+x)$; б) $\log_a(x^2+2x+2) < 0$.

Определите, при каких значениях параметра a неравенство выполняется при любом значении x:

4.9.3. а) $a\cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$;

б) $4^{x^2} + 2(2a+1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0$.

4.9.4. а) $\log_a(x^2+2) > 1$; б) $\log_{a(a+1)}(|x|+4) > 1$;

в) $\log_{a/(a+1)}(x^2+2) > 1$; г) $\log_{(a^2-1)}(a^2x^2+2ax+4) > 1$;

д) $\log_{a^2-6}\left[(a^2-1)x^2+4ax+5\right] < 1$.

Для каждого значения параметра a решите данное неравенство:

4.9.5. а) $a^{x^2-x} > 1$; б) $\log_a(1+x) > 1$;

в) $\log_a(x^2+2x) > 0$; г) $\log_a(x^2+2x) < 1$.

4.9.6. а) $a^2 - 9^{x+1} - 8a\cdot 3^x > 0$; б) $|3^x - 3^{-x}| < 3^a - 3^{-a}$;

в) $|0,1^{-x} - 0,1^x| < 0,1^a - 0,1^{-a}$.

4.9.7. а) $3^{4x} + (x-8-a)3^{2x} + (10a+2x-20-ax) \le 0$;

б) $1-(5+a+2x)2^{2x}+2^{4x}(6a-2x-6+2ax)\ge 0$.

4.9.8. Для каждого значения параметра $a>0$ решите неравенство:

а) $a^{x+2}+8a^{x-1}-4a^{-1}>a-2$; б) $\dfrac{1}{a^x-1}>\dfrac{1}{1-a^{x-1}}$.

4.9.9. Для всех значений параметра a решите неравенство:

а) $\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x}>1$; б) $\dfrac{3\log_a x+6}{2+\log_a^2 x}>1$;

в) $x^{\log_a x}<a$ ($x\ne 1$); г) $x^{\log_a x+4}<a^4x$ ($0<a<1$, $x\ne 1$).

4.9.10. а) $\log_x(x-a)>2$; б) $\log_a x+\log_x a\le 3$;

в) $a\log_3 x+\log_{3x}3+a\ge 0$;

г) $2\log_4(x-a+1)+\log_{1/2}(x-3-2a)\ge 2$.

4.9.11. Решите неравенство, если известно, что оно выполняется при $x=x_0$:

а) $\log_a(x^2-3x)>\log_a(4x-x^2)$, $x_0=3,75$;

б) $\log_a(x^2-x-2)\ge\log_a(3+2x-x^2)$, $x_0=2,25$.

4.9.12. Определите, при каком значении параметра имеет единственное решение система неравенств:

а) $\begin{cases}4^x-5\cdot 2^{x+a}+4^{a+1}\le 0,\\ \log_2(x+a)\le 2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}9^x-\dfrac{10}{3}\cdot 3^{x+a}+9^a\ge 0,\\ \log_{1/3}(x+a)\ge 0.\end{cases}$

4.9.13. Используя метод декомпозиции, решите данное неравенство для каждого допустимого значения параметра a:

а) $\dfrac{1}{\log_a x}>1$; б) $\log_{a+x}2<\log_x 4$, где $a\in(0;1/4)$;

в) $a^x(a-1)^x-2a^{x+1}-(a-1)^x+2a\le 0$;

г) $x^{\sin x}\log_a x+x^a\log_a\dfrac{a}{x}<x^{\sin x}$.

§ 4.10. Тригонометрические уравнения и неравенства

При решении тригонометрических уравнений или неравенств с параметром, в случае замены введения $y = \sin x$ (или $y = \cos x$) и получения решения вида $y = f(a)$, необходимо проверять выполнимость условия $|f(a)| \le 1$. Это дает дополнительные ограничения на a.

Пример 1. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*:

а) $\sin x = \dfrac{a+1}{a-1}$; б) $\cos^2 x = a^2 - 1$.

Решение. а) Решение существует в случае, если $-1 \le \dfrac{a+1}{a-1} \le 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{a-1} \ge -1, \\ \dfrac{a+1}{a-1} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a+1}{a-1} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{a+1}{a-1} - 1 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{a-1} \ge 0, \\ \dfrac{2}{a-1} \le 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства системы $a \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$, второго – $a \in (-\infty; 1)$. Следовательно, $a \le 0$ – решение системы.

Итак, если $a \le 0$, то решением исходного уравнения будут числа $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{a+1}{a-1} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $a > 0$, то решений нет.

Ответ. Если $a \le 0$, то $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{a+1}{a-1} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
если $a > 0$, то решений нет.

Решение. б) Решение существует в случае, если $0 \le a^2 - 1 \le 1$. Это двойное неравенство справедливо при $1 \le |a| \le \sqrt{2}$. При найденных значениях a преобразуем исходное уравнение к виду $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = a^2 - 1$ или $\cos 2x = 2a^2 - 3$. Решение последнего уравнения есть $x = \pm 0{,}5 \arccos(2a^2 - 3) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. Если $1 \le |a| \le \sqrt{2}$, то $x = \pm 0{,}5 \arccos(2a^2 - 3) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
при других значениях a решений нет.

Пример 2. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$(5a-1)\cos x = 2a+3 .$$

Решение. Если $a = 1/5$, то уравнение имеет вид $0\cdot\cos x = 17/5$ и не имеет решений. При $a \neq 1/5$ в уравнение выразим $\cos x = \dfrac{2a+3}{5a-1}$.

Решение последнего уравнения существует в случае, если

$$-1 \le \frac{2a+3}{5a-1} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+3}{5a-1} \ge -1, \\ \dfrac{2a+3}{5a-1} \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a+3}{5a-1} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{2a+3}{5a-1} - 1 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7a+2}{5a-1} \ge 0, \\ \dfrac{4-3a}{5a-1} \le 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства системы $a \in (-\infty;-2/7] \cup (1/5;+\infty)$, второго $a \in (-\infty;1/5) \cup [4/3;+\infty)$. Следовательно, решение системы $a \in (-\infty;-2/7] \cup [4/3;+\infty)$.

Итак, если $a \in (-\infty;-2/7] \cup [4/3;+\infty)$, то решением исходного уравнения будут числа $x = \pm\arccos\dfrac{2a+3}{5a-1} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $a \in (-2/7;4/3)$, то исходное уравнение не имеет решений.

Ответ. Если $a \in \left(-\infty;-\dfrac{2}{7}\right] \cup \left[\dfrac{4}{3};+\infty\right)$, то $x = \pm\arccos\dfrac{2a+3}{5a-1} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a \in (-2/7;4/3)$, то решений нет.

Пример 3. *Для каждого значения параметра* a *решить уравнение*

$$\cos(a+x) = \frac{\cos a}{\cos x} .$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $\cos x \neq 0$.

Записав уравнение в виде

$$\cos(a+x)\cdot\cos x = \cos a$$

и преобразовав произведение в сумму, получим

$$\cos a + \cos(2x+a) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos(2x+a) - \cos a = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2\sin(x+a)\sin x = 0 .$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin(x+a)=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ x+a=\pi m, m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ $x \neq \pi/2+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, запишем ответ.

Ответ. Если $a=\dfrac{\pi(2m-1)}{2}$, то $x=\pi n$, где $m,n\in\mathbb{Z}$;

если $a\neq\dfrac{\pi(2m-1)}{2}$, то $x_1=\pi n$ и $x_2=-a+\pi k$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

Метод введения вспомогательного угла

Рассмотрим уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c\,, \qquad (10.1)$$

где a, b, $c-$ произвольные действительные числа и $a^2+b^2\neq 0$. Решим его с помощью введения вспомогательного угла. Для этого разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ и получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ будем рассматривать как значения косинуса и синуса вспомогательного аргумента φ: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Такое значение φ существует, так как

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1,\ \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1 \text{ и } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\,.$$

Без ограничения общности в уравнении (10.1) можно положить $b\ge 0$; тогда $\sin\varphi\ge 0$ и угол φ можно взять из промежутка $0\le\varphi\le\pi$, $\varphi=\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Данное уравнение запишем в виде

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (10.2)$$

При правая часть уравнения (10.2) по модулю больше единицы, то это уравнение, и, следовательно, уравнение (10.1) не имеют решения. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, то решениями уравнения (10.2) являются числа

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

Замечание. Исходя из сказанного выше, следует равенство

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi). \qquad (10.3)$$

Так как $-1\le\sin(x+\varphi)\le 1$, то выражение $a\sin x+b\cos x$ может принимать любые значения из промежутка $[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}]$, т.е.

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

Пример 4. *При каких значениях параметра* a *имеет хотя бы одно решение уравнение:*

а) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$; б) $|2\sin x-3\cos x|=a$;

в) $a\cos x-\sin x=3$; г) $\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=a$;

д) $|5\sin^2 x+\cos x-7|=a$?

а) ***Решение.*** Используя метод введения вспомогательного угла, преобразуем выражение в левой части уравнения к виду

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

Уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{a}{2}$ имеет решение при $-2\le a\le 2$.

Ответ. $-2\le a\le 2$.

б) ***Решение.*** Воспользуемся методом введения вспомогательного угла $2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right) = \sqrt{13}\sin(x-\varphi)$,

где $\begin{cases}\cos\varphi = 2/\sqrt{13}, \\ \sin\varphi = -3/\sqrt{13}.\end{cases}$.

Левая часть исходного уравнения принимает значения от 0 до $\sqrt{13}$.

Ответ. $0 \le \varphi \le \sqrt{13}$.

в) ***Решение.*** Используя метод введения вспомогательного угла, получим $a\cos x - \sin x = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sin x\right) =$

$= \sqrt{a^2+1}\cos(x+\varphi)$, где $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}.\end{cases}$ Левая часть принимает значения от $-\sqrt{a^2+1}$ до $\sqrt{a^2+1}$. Уравнение будет иметь решение, если будет выполнено условие $\sqrt{a^2+1} \ge 3$, т.е. при $|a| \ge 2\sqrt{2}$.

Ответ. $|a| \ge 2\sqrt{2}$.

г) ***Решение.*** Преобразуем уравнение, используя формулу понижения степени $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x =$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{3\sin 2x}{2} - 2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3}{2}(\sin 2x - \cos 2x) - \frac{1}{2}.$$

Уравнение примет вид $\frac{3}{\sqrt{2}}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = a + \frac{1}{2}$ и будет иметь решение при $-\frac{3}{\sqrt{2}} \le a + \frac{1}{2} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$, т.е. при $-\frac{3\sqrt{2}+1}{2} \le a \le \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ. $-\frac{3\sqrt{2}+1}{2} \le a \le \frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

д) ***Решение.*** Преобразуем левую часть уравнения:

$$|5\sin^2 x+\cos x-7|=|5-5\cos^2 x+\cos x-7|=|-5\cos^2 x+\cos x-2|=$$
$$=5|(\cos x-0{,}1)^2+0{,}39|.$$

Так как $5|0{,}9^2+0{,}39|\le 5|(\cos x-0{,}1)^2+0{,}39|\le 5|(-1{,}1)^2+0{,}39|$, то выражение $5|(\cos x-0{,}1)^2+0{,}39|$ принимает значения от $0{,}195$ до 8.

Следовательно, уравнение имеет хотя бы одно решение при $0{,}195\le a\le 8$.

Ответ. $0{,}195\le a\le 8$.

Пример 5. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*
$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin x\cos x}=a.$$

Решение. Находим ОДЗ: $\sin x\ne 0, \cos x\ne 0$. Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{\cos x+\sin x+1}{\sin x\cos x}=a$ и сделаем замену $\cos x+\sin x=t$. Тогда $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$. Исходное уравнение при $t^2-1\ne 0$ приводится к виду $\dfrac{2(t+1)}{t^2-1}=a$. Отсюда $t=\dfrac{a+2}{a}$.

Выполним обратную замену $\cos x+\sin x=\dfrac{a+2}{a}$ или $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a+2}{a}$, с учетом ограничения $-1\le\dfrac{a+2}{a\sqrt{2}}\le 1$ имеем $a\le -2\sqrt{2}+2$ и $a\ge 2\sqrt{2}+2$.

Учтем условие $t^2-1\ne 0$, т.е. $\cos x+\sin x\ne\pm 1$. Последнее условие удовлетворяет ОДЗ и соответствует $a\ne -1$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{a+2}{\sqrt{2}a}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;-2\sqrt{2}+2]\cup[2\sqrt{2}+2;\infty)$.

Пример 6. *При любом действительном значении параметра a решить уравнение* $|\cos x|=\cos(x+a)$.

Решение. $|\cos x| = \cos(x+a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = \cos(x+a), \\ \cos x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -\cos x = \cos(x+a), \\ \cos x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Рассмотрим первую систему совокупности

$$\begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = x + a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -x - a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -a/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Неравенство $\cos\left(-a/2 + \pi k\right) \ge 0$ справедливо при

$$-\pi/2 + 2\pi n \le -a/2 + \pi k \le \pi/2 + 2\pi n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\pi + 4\pi n + 2\pi k \le a \le \pi + 4\pi n + 2\pi k\ ,\ k, n \in \mathbb{Z}\ .$$

Рассмотрим вторую систему совокупности

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x - \pi = x + a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x - \pi = -x - a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = -\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi/2 - a/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Неравенство $\cos\left(-a/2 + \pi k\right) < 0$ справедливо при

$$4\pi n + 2\pi k \le a \le -2\pi + 4\pi n + 2\pi k\ ,\ n, k \in \mathbb{Z}\ .$$

Ответ. $x = -\dfrac{a}{2} + \pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $4\pi n < a < \pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ при $\pi + 4\pi n < a < 2\pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ при $2\pi + 4\pi n < a < 3\pi + 4\pi n$;

$x = -\dfrac{a}{2} + \pi + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ при $3\pi + 4\pi n < a < 4\pi + 4\pi n$;

$-\pi/2 + 2\pi k \le x \le \pi/2 + 2\pi k$ при $a = 2\pi n$;

$\pi/2 + 2\pi k \le x \le 3\pi/2 + 2\pi k$ при $a = \pi + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. *При любом действительном значении параметра* a *решить уравнение*

$$(a-1)\cos x + (a+1)\sin x = 2a\ .$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду $\sin(x+\alpha) = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$,

где α определяется из условий

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{a-1}{\sqrt{2a^2+2}}, \\ \cos\alpha = \dfrac{a+1}{\sqrt{2a^2+2}}. \end{cases}$$

Уравнение $\sin(x+\alpha) = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$ имеет действительные корни при условии, что $\left|\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\right| \le 1$, т.е. при $-1 \le a \le 1$. Тогда при полученных значениях a $\sin\alpha = \dfrac{a-1}{\sqrt{2a^2+2}} \le 0$ и $\cos\alpha = \dfrac{a+1}{\sqrt{2a^2+2}} \ge 0$, следовательно, $\alpha = \arcsin\dfrac{1-a}{\sqrt{2a^2+2}}$.

Решение уравнения $\sin(x+\alpha) = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$ можно записать в виде

$$x = -\arcsin\frac{1-a}{\sqrt{2a^2+2}} + (-1)^n \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. Если $a < -1$ или $a > 1$, то решений нет;
если $-1 \le a \le 1$, то

$$x = -\arcsin\frac{1-a}{\sqrt{2a^2+2}} + (-1)^n \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 8. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$a\sin^2 x + 2(a+1)\sin x + 4 = 0 .$$

Решение. Положим $y = \sin x$, где $-1 \le y \le 1$. Тогда уравнение примет вид $ay^2 + 2(a+1)y + 4 = 0$.

Первым контрольным значением является $a = 0$. В этом случае приходим к уравнению $y = -2$ или $\sin x = -2$, которое не имеет решений.

Пусть $a \ne 0$. Дискриминант квадратного уравнения $ay^2 + 2(a+1)y + 4 = 0$ равен $D = 4(a^2 - 2a + 1) = 4(a-1)^2$. Второе контрольное значение параметра есть $a = 1$. В этом случае $D = 0$. Корнями уравнения $ay^2 + 2(a+1)y + 4 = 0$ являются числа $y_1 = \dfrac{-(a+1)-(a-1)}{a} = -2$ и $y_2 = \dfrac{-(a+1)+(a-1)}{a} = -\dfrac{2}{a}$. При этом должны выполняться ограничения $-1 \le y_1 \le 1$, $-1 \le y_2 \le 1$.

Для корня y_1 условие $-1 \le y_1 \le 1$ не выполняется, и уравнение $\sin x = -2$ не имеет решений.

Для корня $y_2 = \dfrac{-(a+1)+(a-1)}{a} = -\dfrac{2}{a}$ уравнение $y_2 = \sin x = -\dfrac{2}{a}$ имеет решение при $|a| \ge 2$. Это решение записывается следующим образом $x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{2}{a} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. Если $|a| \ge 2$, то $x = (-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{2}{a} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
если $|a| < 2$, то решений нет.

Пример 9. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a .$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения к виду

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} .$$

Получили уравнение $1-\frac{\sin^2 2x}{2}=a$ или $\sin^2 2x = 2(1-a)$. Используя формулу понижения степени, получим уравнение $\frac{1-\cos 4x}{2}=2(1-a)$ или $\cos 4x = 4a-3$.

Учитывая, что $-1 \le \cos 4x \le 1$, получаем ограничения на правую часть последнего уравнения $-1 \le 4a-3 \le 1$ или $0,5 \le a \le 1$.

Ответ. Если $0,5 \le a \le 1$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a < 0,5$ или $a > 1$, то решений нет.

Пример 10. *Найти все значения параметра* a*, при которых уравнения* $\cos x + \sin x = 1$ *и* $\cos\frac{x}{2} = a$ *имеют хотя бы один общий корень.*

Решение. Преобразуем первое уравнение к виду

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Решения этого уравнения имеют вид $x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Представим их в виде двух серий: $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k_1$ и $x_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k_2=2\pi k_2$; $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Подставим корни первой серии во второе уравнение. При четных k_1 получим $\cos\frac{x_1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, при нечетных $\cos\frac{x_1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Аналогично, подставим корни второй серии во второе уравнение. При четных k_2 получим $\cos\frac{x_2}{2}=1$, при нечетных $\cos\frac{x_2}{2}=-1$.

Таким образом, возможные значения a – это $\pm 1/\sqrt{2}$ и ± 1.

Ответ. $\pm 1/\sqrt{2}$ и ± 1.

Пример 11. *Для каждого значения параметра a решить уравнение*

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x).$$

Решение. Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Приведем исходное уравнение к виду

$$(1-a)(\sin^4 x + \cos^4 x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

Так как $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$, то получим уравнение $1 - a = \sin^2 2x \cdot \frac{3-2a}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{6a-5}{3-2a}$ при условии $3 - 2a \neq 0$. Накладываем ограничения $-1 \le \frac{6a-5}{3-2a} \le 1$, что равносильно $0,5 \le a \le 1$. При этих значениях a выполняется условие $3 - 2a \neq 0$.

Ответ. Если $0,5 \le a \le 1$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{6a-5}{3-2a} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, при других a решений нет.

Тригонометрические неравенства

Решение многих тригонометрических неравенств сводится к решению простейших неравенств. При их решении следует учитывать ограниченность и периодичность тригонометрических функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 12. *Для каждого значения параметра a решить неравенство:*

а) $\sin 2x \ge a^2 - 3$; б) $\cos(x + \pi/6) < 2a + 1$;

в) $\mathrm{tg}(ax - \pi/4) \le 1$.

Решение. а) Поскольку $1 \ge \sin 2x \ge -1$, то неравенство $\sin 2x \ge a^2 - 3$ не имеет решений, если $a^2 - 3 > 1$, т.е. при

$a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Если $a^2 - 3 \le -1$, т.е. $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, то решением исходного неравенства является любое $x \in \mathbb{R}$.

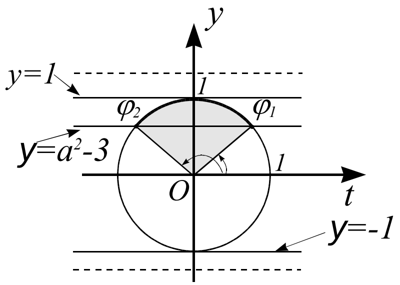


Рис. 63

Если $1 > a^2 - 3 > -1$, то найдем на единичной окружности две точки φ_1 и φ_2, ордината каждой из которых равна $a^2 - 3$. Соответственно, (см. рис. 63) $\varphi_1 = \arcsin(a^2 - 3)$ и $\varphi_2 = \pi - \arcsin(a^2 - 3)$.

С учетом периодичности функции $y = \sin 2x$ можно заключить, что исходное неравенство справедливо при

$$\arcsin(a^2 - 3) + 2\pi n \le 2x \le \pi - \arcsin(a^2 - 3) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z},$$

т.е. при

$$\frac{\arcsin(a^2 - 3)}{2} + \pi n \le x \le \frac{\pi - \arcsin(a^2 - 3)}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. Если $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то решений нет; если $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \in [-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2]$, то

$$\frac{\arcsin(a^2 - 3)}{2} + \pi n \le x \le \frac{\pi - \arcsin(a^2 - 3)}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

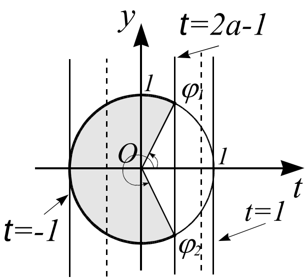


Рис. 64

Решение. б) Поскольку $1 \ge \cos(x + \pi/6) \ge -1$, то неравенство $\cos(x + \pi/6) < 2a + 1$ не имеет решений, если $2a + 1 \le -1$, т.е. при $a \in (-\infty; -1]$. Если $2a + 1 > 1$, т.е. $a \in (0; +\infty)$, то решением исходного неравенства является любое $x \in \mathbb{R}$.

Если $1 > 2a + 1 > -1$, то найдем на единичной окружности две точки φ_1 и φ_2, ордината каждой из которых равна $2a + 1$. Соответственно, $\varphi_1 = \arccos(2a + 1)$ и $\varphi_2 = 2\pi - \arccos(2a + 1)$

(см. рис. 64). С учетом периодичности функции $y = \cos(x + \pi / 6)$ можно заключить, что исходное неравенство справедливо при $\varphi_1 + 2\pi n < x + \pi / 6 < \varphi_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. при

$$\arccos(2a+1) - \pi / 6 + 2\pi n < x < 11\pi / 6 - \arccos(2a+1) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. Если $a \le -1$, то решений нет; если $a > 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \in (-1; 0]$, то

$$\arccos(2a+1) - \pi / 6 + 2\pi n < x < 11\pi / 6 - \arccos(2a+1) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Решение. в) На оси тангенсов (см. рис. 65) отметим точку, ордината которой равна 1 ($\varphi_1 = \pi / 4$). Неравенству будут удовлетворять все значения аргумента $z = ax - \pi / 4$, для которых значения $\operatorname{tg} z$ будут расположены на оси тангенсов ниже отмеченной точки или совпадать с ней.

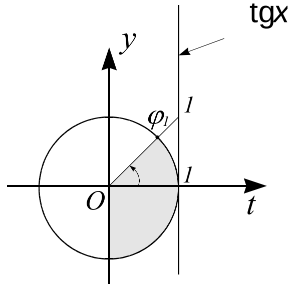


Рис. 65

С учетом периодичности функции $y = \operatorname{tg} z$ запишем решение неравенства $\operatorname{tg} z \le 1$: $-\pi / 2 + \pi n < z \le \pi / 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ или $-\pi / 2 + \pi n < ax - \pi / 4 \le \pi / 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем $-\pi / 4 + \pi n < ax \le \pi / 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Соответственно, если $a > 0$, то $\dfrac{4n-1}{4a} \cdot \pi < x \le \dfrac{2n+1}{2a} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a < 0$, то $\dfrac{2n+1}{2a} \cdot \pi \le x < \dfrac{4n-1}{4a} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $a = 0$, то исходное неравенство имеет вид $\operatorname{tg}(-\pi / 4) \le 1$, т.е. справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

Ответ. Если $a < 0$, то $\dfrac{2n+1}{2a} \cdot \pi \le x < \dfrac{4n-1}{4a} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a > 0$, то $\dfrac{4n-1}{4a} \cdot \pi < x \le \dfrac{2n+1}{2a} \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 13. *Для каждого значения параметра a решить неравенство*

$$\sin^2 x + \sin 2x \ge a.$$

Решение. Выполняя преобразования, получим

$$\sin^2 x+\sin 2x \ge a \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x \ge a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x-\cos 2x \ge 2a-1 \Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) \ge 2a-1 \Leftrightarrow$$

$$\sin(2x-\varphi) \ge \frac{2a-1}{\sqrt{5}}, \text{ где } \varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

При $\frac{2a-1}{\sqrt{5}}>1$, т.е. при $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, неравенство не имеет решений.

Если $-1<\frac{2a-1}{\sqrt{5}}\le -1$, т.е. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то неравенство имеет решения и они задаются неравенствами

$$\alpha+2\pi n \le 2x-\varphi \le \pi-\alpha+2\pi n, \text{ где } \alpha=\arcsin\frac{2a-1}{\sqrt{5}} \text{ и } n\in\mathbb{Z},$$

или $\frac{\alpha+\varphi}{2}+\pi n \le x \le \frac{\pi-\alpha+\varphi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Если $\frac{2a-1}{\sqrt{5}}\le -1$, т.е. $a\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, то решением является $x\in\mathbb{R}$.

Ответ. Если $a\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, то решением является $x\in\mathbb{R}$; если $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $\frac{\alpha+\varphi}{2}+\pi n \le x \le \frac{\pi-\alpha+\varphi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ и где $\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; если $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то решений нет.

Задачи для самостоятельного решения

4.10.1. Решите уравнение для всех значений параметра a:

а) $3\cos x = 4a + 1$; б) $(a^2 - 1)\sin x = a + 1$;

в) $a^2 \mathrm{tg}\, x - 25\mathrm{tg}\, x - a - 5 = 0$.

4.10.2. Установите, при каких значениях параметра a имеет хотя бы одно решение уравнение:

а) $\sin x + 2\cos x = a$; б) $|3\sin x + 4\cos x - a| = 2$;

в) $5 - \sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3a$; г) $\sin^2 x - |\cos x \cdot \sin x| = a$;

д) $2\cos^2 x - |\cos x \cdot \sin x| = a$.

4.10.3. Найдите все значения параметра b, при которых уравнения $\cos x + \sin x = 1$ и $\sin\dfrac{x}{2} = b$ имеют хотя бы один общий корень.

4.10.4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет точно два различных решения на отрезке $[0;\pi]$ уравнение:

а) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a}{3a+1}$; б) $\dfrac{1}{3}\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a}{a-2}$.

Для каждого значения параметра a решите уравнение:

4.10.5. а) $\sin x + a \cdot |\sin x| = 2$; б) $|\cos x| - a\cos x = 5$.

4.10.6. а) $a\sin^2 x + \cos x = 0$; б) $\sin^2 x + 4\sin x + a = 0$

в) $\sin x + \cos x = a^2$; г) $\sin 2x + 3\cos 2x = a$.

4.10.7. Определите наибольшее целое значение параметра a, при котором имеет бесконечно много решений $(x; y)$ уравнение:

а) $3\sin x + 4\cos y - 6\cos x = a$; б) $3\sin x - 4\cos y + 5\cos x = a$.

4.10.8. Найдите все значения параметра a, при которых имеет хотя бы один корень уравнение:

а) $7a\sin 2x = \mathrm{ctg} x + \mathrm{tg} x$; б) $9a\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{ctg} x + \mathrm{tg} x$.

4.10.9. Найдите в зависимости от значений параметра a число корней уравнения, лежащих в промежутке $\left[0;\pi/2\right]$:

а) $\cos x = a\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1\right)$; б) $\cos^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = a(1 + \sin 2x)$.

Для каждого значения параметра a решите уравнение:

4.10.10. а) $\dfrac{a\cos x - 1}{\cos x + \sin x} = 0$;

б) $\dfrac{a - b\sin x}{a\cos x - b} = \dfrac{a - b\cos x}{a\sin x - b}$, где $a^2 + b^2 \neq 0$.

4.10.11. а) $\sin x + \sin\dfrac{3x}{2} = a\sin\dfrac{x}{2}$; б) $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$;

в) $\cos^6 x - \sin^6 x = \dfrac{a}{8}\cos 2x$; г) $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}a + 1 = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}a$.

Для каждого значения параметра a решите данное неравенство.

4.10.12. а) $\cos(2x - \pi/4) \geq a$; б) $\sin(ax - 3) < a$;

в) $\operatorname{tg}(ax + 2) \geq b$.

4.10.13. а) $(a - 2)\sin x > 3a + 4$; б) $(5a - 7)\cos x < a + 5$.

Решите неравенство для значений параметра $0 < a < 1$:

4.10.14. а) $\sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geq a$; б) $\cos^2(x + 1) < a$.

Для каждого значения параметра a решите данное неравенство.

4.10.15. а) $\dfrac{\operatorname{tg}x - 1}{\operatorname{tg}x + 2} > \dfrac{1}{a}$; б) $\cos x + \dfrac{1}{\cos x} \geq a$.

4.10.16. а) $\sin x + a\cos x < a$; б) $\cos x + a\sin x < a$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x > a$.

4.10.17. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство:

а) $-5 + 5a\sin^2 x + a(3 - \cos x)^3 > 0$;

а) $a(4 - \sin x)^4 + \cos^2 x - 3 + a > 0$.

ГЛАВА V. Задачи с параметром в теме «Начала математического анализа»

§ 5.1. Свойства функций

1. *Область определения и множество значений функции*

Говорят, что на числовом множестве X определена ***числовая функция***, если каждому элементу x из этого множества поставлено в соответствие единственное число. Множество X называется ***областью определения*** функции. Произвольное число $x \in X$ называется ***аргументом*** функции или независимой переменной. Область определения функции f обычно обозначается D_f (или $D(f)$). Если число a принадлежит области определения функции f, то говорят, что ***функция f определена в точке*** a. Для указания значения функции в фиксированной точке a используется запись: $f(a)$, $y(a)$, $f(x)\big|_{x=a}$.

Множеством значений функции $f(x)$ (обозначается E_f или $E(f)$) называется множество всех $a \in \mathbb{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D_f$ такое, что $f(x) = a$.

Пример 1. *Найти область определения функции*

$$y(x) = \frac{x-a}{3x+a} + \sqrt{a^2 - x^2} .$$

Решение. Для функции $f(x) = \dfrac{x-a}{3x+a}$ областью определения является множество тех значений аргумента, для которых знаменатель дроби не обращается в нуль, т.е. $x \neq -a/3$. Функция $g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ определена на множестве тех значений x, для которых $a^2 - x^2 \geq 0$. Область определения функции $y(x) = f(x) + g(x)$ есть пересечение областей определения функций f и g, и, значит, она состоит из значений x, являющихся решениями смешанной системы:

$$\begin{cases} x \neq -a/3, \\ a^2 - x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -a/3, \\ |x| \leq |a|. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим D_y.

Ответ. Если $a<0$, то $D_y=[a;-a/3)\cup(-a/3;-a]$;

если $a=0$, то $D_y=\varnothing$;

если $a>0$, то $D_y=[-a;-a/3)\cup(-a/3;a]$.

Пример 2. *Найти область определения и множество значений функции* $f(x)=\sqrt{\log_a \cos x}$.

Решение. D_f функции задается неравенством $\log_a \cos x \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1, \\ 0<\cos x\le 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ \cos x\ge 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1, \\ -\pi/2+2\pi k<x\le \pi/2+2\pi k, k\in\mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ x=2\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно, областью определения данной функции является множество $\{2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$. При каждом $k\in\mathbb{Z}$ имеем $f(2\pi k)=\sqrt{\log_4 \cos 2\pi k}=0$. Таким образом, множество значений данной функции состоит из одного числа 0.

Ответ. $D_f=\{2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$; $E_f=\{0\}$.

Замечание. Знание области значений функции оказывается полезным при решении уравнений и неравенств в следующих случаях.

(1) Уравнение $f(x)=a$ или неравенство $f(x)\vee a$ (символ $\vee$ означает любой из знаков $\le,\ge$) имеет решение, если $a\in E_f$; неравенство $f(x)>a$ имеет решение, если $a\in E_f$ и $a\ne \max\limits_{D_f} f(x)$; неравенство $f(x)<a$ имеет решение, если $a\in E_f$ и $a\ne \min\limits_{D_f} f(x)$.

(2) Уравнение $f(x,a)=g(x,a)$ имеет решение, если $E_f\cap E_g\ne\varnothing$. В случае, когда $f(x,a)\ge M$, а $g(x,a)\le M$ для всех значений x и a, то $f(x,a)=g(x,a)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a)=M, \\ g(x,a)=M. \end{cases}$

Последнее свойство (ограниченность левой и правой частей) используется и при решении или доказательстве неравенств.

2. *Четные и нечетные функции*

Множество точек X числовой оси называется ***симметричным*** относительно начала координат (точки O), если для любого числа $x \in X$ число ($-x$) также принадлежит множеству X .

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X , называется ***четной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество *X* симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве *X*, ***называется нечетной***, если выполнены следующие условия:

(1) множество *X* симметрично относительно начала координат;

(2) для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy , нечетной – симметричен относительно начала координат.

Свойства четных и нечетных функций:

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции, заданные на одном и том же множестве *X*, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, ($g(x) \neq 0$) являются четными функциями на множестве *X*.
2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – нечетные функции, заданные на одном и том же множестве *X*, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ являются нечетными функциями на множестве *X*, а функции $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, ($g(x) \neq 0$ на *X*) являются четными функциями на множестве *X*.

Необходимо отметить, что существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, например, $\dfrac{1}{1+x}$, $x^2 + x + 1$. Для первой из этих функций не выполнено условие симметрии естественной области определения относительно начала координат. Вторая функция определена при любом значении аргумента, поэтому условие симметрии для нее выполнено. Но, например, $f(-1) \neq -f(1)$ или $f(-2) \neq f(2)$.

При доказательстве, к примеру, того факта, что функция не является четной, ссылка на то, что выражения $f(-x)$ и $f(x)$ «разные», поэтому $f(-x) \neq f(x)$, ничего не доказывает, хотя бы потому, что совсем разные по внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию. Таким образом, чтобы опровергнуть условие $f(-x) = f(x)$, нужно доказать существование соответствующего значения x, для которого это условие не выполнено.

Пример 3. *При каких значениях параметра* a *является нечетной функция* $f(x) = \dfrac{1}{2^x + a} + \dfrac{1}{2}$.

Решение. Необходимым (но не достаточным) условием нечетности функции является выполнение при $x = 0$ одного из условий:

(а) $f(0) = 0$;

(б) функция f не определена в нуле.

При $x = 0$ $\quad f(0) = \dfrac{1}{2^0 + a} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a+3}{2(a+1)}$. Условие (а) выполняется при $a = -3$, а условие (б) – при $a = -1$.

Рассмотрим случай $a = -3$. Тогда $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 3} + \dfrac{1}{2}$. В этом случае область определения $D_f = (-\infty; \log_2 3) \cup (\log_2 3; +\infty)$ не является симметричной относительно точки $x = 0$. Следовательно, при $a = -3$ функция не может быть нечетной.

Если $a = -1$, то $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1} + \dfrac{1}{2}$ или $f(x) = \dfrac{2^x + 1}{2(2^x - 1)}$. В этом случае $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ симметрична относительно точки $x = 0$. Остается проверить выполнение условия $f(x) = -f(x)$. Действительно,

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2(2^{-x} - 1)} = \frac{1/2^x + 1}{2\left(1/2^x - 1\right)} = \frac{2^x + 1}{2(1 - 2^x)} = -\frac{2^x + 1}{2(2^x - 1)} = -f(x).$$

Следовательно, при $a = -1$ функция $f(x)$ нечетная.

Ответ. $a = -1$.

3. *Обратная функция*

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in D_f$, такова, что для любых $x_1, x_2 \in D_f$ из того, что $x_1 \neq x_2$ следует $f(x)_1 \neq f(x_2)$. Тогда для каждого $y \in E_f$ найдется только одно значение $x \in D_f$ такое, что $f(x) = y$.

Функцию, определенную на E_f и ставящую в соответствие значению $y \in E_f$ такое значение $x \in D_f$, что $f(x) = y$, называют ***обратной*** для функции f и обозначают f^{-1}, т.е. $x = f^{-1}(y)$, $y \in E_f$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции через x, а значение через y, ее записывают в виде $y = f^{-1}(x)$, $x \in D_{f^{-1}}$.

Имеют место тождества:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x,\ x \in D_f, \text{ и } f(f^{-1}(x)) \equiv x,\ x \in E_f.$$

Функцию, имеющую обратную, называют ***обратимой***.

График обратной функции $y = f^{-1}(x)$, $x \in D_{f^{-1}}$ симметричен графику функции $y = f(x)$, $x \in D_f$ относительно прямой $y = x$.

Достаточный признак существования обратной функции: *если функция строго возрастает (убывает) на множестве X, то для нее существует обратная функция, и она также строго возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.*

Пример 4. *Указать все значения параметра a, для которых имеет решение уравнение* $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$.

Решение. Пусть $t = \sin x$, где $-1 \le t \le 1$. Тогда уравнение будет равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \sqrt{a + t} = t^2 - a, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Функция $y = t^2 - a$ на отрезке $[0;1]$ обратима. Обратной будет $y = \sqrt{a + t}$. Обе функции являются возрастающими на $[0;1]$, поэтому общие их точки лежат на прямой $y = t$. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} t^2 - a = t, \\ 0 \le t \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t = a, \\ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Так как из $0 \le t \le 1$ следует $-1/4 \le t^2 - t \le 0$, то исходное уравнение имеет решение при $-1/4 \le a \le 0$.

Ответ. $-1/4 \le a \le 0$.

4. *Непрерывность*

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $(a;b)$, называется ***непрерывной в точке*** $x_0 \in (a;b)$, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) он равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доказательство непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в проверке равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 5. *Найдите все значения параметра* a*, такие, что функция* $f(x)$ *является непрерывной на всей числовой прямой, если*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, \text{ если } x > 2, \\ x + a^2 - 2, \text{ если } x \le 2. \end{cases}$$

Решение. При $x > 2$ функция $f(x) = ax^2$ – непрерывна при всех значениях x и $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4a$.

При $x \le 2$ функция $f(x) = x + a^2 - 2$ – непрерывна при всех значениях x и $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = a^2$.

Следовательно, функция $f(x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$, если выполняется равенство $a^2 = 4a$, т.е. при $a = 0$ или $a = 4$.

Ответ. $a = 0$ или $a = 4$.

5. *Монотонные функции*

Функция $y = f(x),\ x \in X$, называется ***возрастающей*** (***невозрастающей***) на множестве $M \subseteq X$, если для любых x_1 и x_2 из множества M таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Функция $y = f(x),\ x \in X$, называется ***убывающей*** (***неубывающей***) на множестве $M \subseteq X$, если для любых x_1 и x_2 из множества M таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).

Если функция обладает одним из перечисленных свойств (является возрастающей, убывающей, невозрастающей или неубывающей) на множестве $M \subseteq X$, то такая функция называется ***монотонной*** на M.

Отвечая на вопрос о промежутках монотонности функций в задачах, следует указывать максимально возможные промежутки возрастания и убывания функции.

Замечание. Функция $y = f(x)$ монотонная на множествах M_1 и M_2, может не быть монотонной на объединении этих множеств. Например, функция $y = 1/x$ убывает на $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, но не является убывающей на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. В самом деле, например, возьмем $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Тогда $x_1 < x_2$, но $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$.

Свойства монотонных функций:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на множестве M, то функция $f(x) + g(x)$ также возрастает (убывает) на множестве M;

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на множестве M и, кроме того, $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ при всех допустимых значениях x, то функция $f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на M;

3. Если функции $f(x)$ монотонная, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня, так как монотонная функция принимает каждое свое значение только один раз.

Замечание. Если функция $f(x)$ монотонная, то из равенства $f(x)=f(y)$ следует $x=y$, из неравенства $f(x)>f(y)$ следует $x>y$ (если f – возрастающая) или $x<y$ (если f – убывающая).

Пример 6. *Определить число корней уравнения*

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x+11}=a.$$

Решение. $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{x+11}$ возрастает на $D_f=[5;+\infty)$, поэтому $f(x)\ge f(5)=4$. Так как $E_f=[4;+\infty)$, то исходное уравнение при $a\ge 4$ имеет единственный корень, а при $a<4$ корней не имеет.

Ответ. Если $a\ge 4$, то один корень; если $a<4$, то корней нет.

6. *Наибольшее и наименьшее значения функций*

Если существует точка x_0 из множества M, $M\subseteq D_f$, такая, что при любом x из множества M имеет место неравенство

$$f(x)\ge f(x_0)\ \ (f(x)\le f(x_0)),$$

то говорят, что функция $y=f(x)$ на множестве M принимает свое ***наименьшее (наибольшее)*** значение $y=f(x_0)$.

Функция может и не иметь на множестве наибольшего (наименьшего) значения, но если наибольшее (наименьшее) значение функции на множестве существует, то оно единственно. Заметим, что точек x_0, в которых оно принимается, может быть много.

Если функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$, то наименьшее (наибольшее) значение она принимает в точке $x=a$, а наибольшее (наименьшее) значение – в точке $x=b$.

Многие задачи сводятся к нахождению **наибольшего и наименьшего значения квадратичной функции**. Так как при $a\ne 0$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$ то отсюда следует, что:

а) $y_{наим.}=c-\dfrac{b^2}{4a}$ при $a>0$ и достигается оно при $x=-\dfrac{b}{2a}$;

б) $y_{наиб.}=c-\dfrac{b^2}{4a}$ при $a<0$ и достигается при $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Пример 7. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $y = 4x^2 - 24ax + a$.

Решение. Имеем $4x^2 - 24ax + a = 4(x - 3a)^2 - 36a^2 + a$. Отсюда следует, что наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 24ax + a$ равно $-36a^2 + a$, и принимается это значение в точке $x = 3a$. Так как функция $y = 4x^2 - 24ax + a$ не является ограниченной сверху, то наибольшего значения она не имеет.

Ответ. $y_{\text{наим}} = -36a^2 + a$, наибольшего значения функция не имеет.

Пример 8. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y(x) = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x.$$

Решение. Преобразуем выражение, используя метод введения вспомогательного аргумента.

Заметим, что $\sqrt{4a^2 + (a^2 - 1)^2} = a^2 + 1$.

$$y(x) = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x = (a^2 + 1)\left(\frac{2a}{a^2 + 1}\sin x + \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\cos x\right) =$$

$$= (a^2 + 1)(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = (a^2 + 1)\sin(x + \alpha),$$

где $\alpha = \arccos\frac{2a}{a^2 + 1}$. Так как наибольшее значение $\sin(x + \alpha)$ равно 1, а наименьшее значение равно -1, то, следовательно, наибольшее значение функции $y = 2a\sin x + (a^2 - 1)\cos x$ равно $a^2 + 1$, а наименьшее равно $-(a^2 + 1)$. Точек, где принимаются наибольшее и наименьшее значения, бесконечно много.

Ответ. $y_{\text{наим.}} = -(a^2 + 1), y_{\text{наиб.}} = a^2 + 1$.

Пример 9. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}.$$

Решение. Воспользуемся методом введения параметра. Найдем значения числа a, при которых имеет решение уравнение

$$\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a.$$

Так как $\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a \Leftrightarrow (a-1)x^2-x+(a-2)=0$, то решение будет существовать, если дискриминант полученного квадратного уравнения неотрицателен. $D=-4a^2+12a-7\geq 0$ при $\frac{3-\sqrt{2}}{2}\leq a\leq\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $E_y=\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2};\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Значит, $y_{\text{наим.}}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}, y_{\text{наиб.}}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $y_{\text{наим.}}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}, y_{\text{наиб.}}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

7. *Периодические функции*

Функция $y=f(x)$, $x\in X$, называется ***периодической*** на X, если существует число T, $T\neq 0$, называемое периодом функции $f(x)$, такое, что:

(а) числа $x+T$ и $x-T$ принадлежат X для каждого $x\in X$;

(б) для каждого $x\in X$ имеет место равенство $f(x+T)=f(x)$.

Если T – период функции, то ее периодом будет также и число kT, где k – любое целое число.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то периодом их суммы, произведения, разности и частного является число T, кратное T_1 и T_2.

Наименьший из положительных периодов периодической функции (если он существует) называется ее ***главным периодом***.

Задачи для самостоятельного решения

Область определения и множество значений

5.1.1. Найдите область определения D_f функции $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$; б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x+a}}$;

в) $f(x)=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$; г) $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{a^2-x^2}$;

д) $f(x)=\arccos(a^2-x^2)$; е) $f(x)=\lg(x^2+(a-3)x-3a)$.

5.1.2. Найдите область определения D_f функции $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{3a+x}-\sqrt{a}}$;

б) $f(x)=\sqrt{a+x}+\lg\left(\dfrac{1}{a}-x\right)+\sqrt{\dfrac{a}{x}}$;

в) $f(x)=\lg(a-\sqrt{2a+x})+\sqrt{9-a^2}$;

г) $f(x)=\sqrt{a^2\sqrt{2}-x\sqrt{a^2+x^2}}$;

д) $f(x)=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{4\pi^2-x^2}+\lg(x-a)+\sqrt{a+4\pi}$.

5.1.3. Найдите множество значений E_f функции $f(x)$:

а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x-a}}$; б) $f(x)=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{a^2-x^2}$; г) $f(x)=\arccos\dfrac{a^2-x^2}{a^2}$;

д) $f(x)=\lg(x^2+(a-3)x-3a)$.

5.1.4. Найдите множество значений E_f функции $f(x)$:

а) $y=ax+\dfrac{b}{x}$, где $ab>0$; б) $y=ax+\dfrac{b}{x}$, где $ab<0$.

5.1.5. При каких значениях параметра a функция, заданная формулой $y=\dfrac{x^3+ax^2+2x}{2x-1}$ на своей области определения совпадает с квадратичной функцией?

б) При каких значениях параметров a и b функция, заданная формулой $y=\dfrac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x-1}$ является линейной?

Четность и нечетность

5.1.6. Для всех значений параметра a исследуйте на четность и нечетность функцию ($x\in\mathbb{R}$):

а) $f(x)=(a-2)x+3a-4$; б) $f(x)=x^2+(a^2-4)x+a$;

в) $f(x)=(a^2-4)x^2+(a^2-5)x+a^2+2a$.

5.1.7. При каких значениях параметра a является нечетной функция $f(x)$:

а) $f(x)=\dfrac{5^x+a-1}{5^x+a+1}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{a-3^x}-\dfrac{1}{2}$.

5.1.8. Определите все значения параметра a, такие, что функция $g(x)=f(x-a)$ является четной, если

а) $f(x)=\sqrt{x^2-x+4}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+9}$.

5.1.9. Для всех значений параметра a исследуйте на четность и нечетность данную функцию:

а) $f(x)=\cos\dfrac{a+x}{3}+\lg\dfrac{2x-a}{2x+a}$; б) $f(x)=\cos\dfrac{a+x}{2}+\lg\dfrac{3x+a}{3x-a}$.

5.1.10. Укажите четные и нечетные функции среди данных:

$f_1(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$; $f_3(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$; $f_4(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$;

$f_5(x)=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$.

5.1.11. Найдите все значения параметра b такие, что функция $f(x)=a+\sqrt{-x^2-2x+2bx-b^2+2b+8}$ является четной для любого значения параметра a.

Обратимость

5.1.12. Определите значения a, при которых функция $f(x)$ на заданном множестве имеет обратную функцию, и найдите эту функцию:

а) $f(x)=(a^2-4)x+\sqrt{a^2}$ ($x\in\mathbb{R}$); б) $f(x)=x^2+4x-3$ ($x\geq a$).

5.1.13. При каких значениях параметров a и b данная функция имеет обратную и совпадает с ней, если:

а) $y=ax+b$; б) функция $y=x^a$, где $a\in\mathbb{R}$?

5.1.14. Укажите все значения параметра a, при которых данная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;a+2]$, является обратимой:

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}|x+1|+|x-2|, \text{ если } x\in(-\infty;2],\\ x^2-8x+15, \text{ если } x\in(2;+\infty);\end{cases}$$

$$\text{б) } f(x)=\begin{cases}|x+1|+|x-2|, \text{ если } x\in(-\infty;1],\\ x^2-6x+8, \text{ если } x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

5.1.15. Решите данное уравнение.

а) $x^2+2ax+1/16=-a+\sqrt{a^2+x-1/16}$ при $0<a<1/4$;

б) $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$.

5.1.16. Найдите значения параметра a, при которых имеет решение уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}}=2x-x^2$.

Непрерывность функции

5.1.17. Подберите значения параметров a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на всей числовой прямой:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x>2,\\ x+a, \text{ если } x\leq 2;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x>2,\\ ax+2, \text{ если } x\leq 2;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}, \text{ если } x<1,\\ x^5-4ax+a^2, \text{ если } x\geq 1;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ если } x\leq 1,\\ ax^2+bx, \text{ если } x>1;\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}|x^2-5x+6|, \text{ если } x>2,\\ ax-b, \text{ если } x\leq 2.\end{cases}$

Периодичность

5.1.18. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=(a+3)x+5a$ ($x\in\mathbb{R}$) является периодической.

5.1.19. Найдите значения параметра $n\in\mathbb{Z}$, при которых функция $f(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin(x/n)}$ имеет периодом число 4π.

5.1.20. Найдите значения параметра $a\in\mathbb{Q}$, при которых функции $f(x)=\sin\dfrac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}$ и $g(x)=\operatorname{tg}\dfrac{3ax}{1-2a+\sqrt{108}}$ имеют одинаковый период.

5.1.21. Докажите, что функция $y=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, является периодической, если ее график симметричен относительно прямой $x=a$ и относительно

а) прямой $x=b$ ($a\neq b$); б) точки $B(b;y_0)$ ($a\neq b$).

5.1.22. Докажите, что если функция $f(x)$ является периодической, то $b\in\mathbb{Q}$, где:

а) $f(x)=\sin x+\cos bx$; б) $f(x)=\cos x+\sin bx$.

Монотонность

5.1.23. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=(a-1)x+a^2-3$ ($x\in\mathbb{R}$): а) возрастает; б) убывает.

5.1.24. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=ax^2+6x+a$ ($x\in[-1;3]$): а) возрастает; б) убывает.

5.1.25. Найдите значения параметра a, при которых функция $f(x)=\log_2(a^2x^2+(a+4)x+2)$ ($x>0$) является монотонной.

5.1.26. Для каждого значения параметра a решите данное уравнение или неравенство.

а) $\sqrt{2}\cdot a-3\sqrt{x}=\sqrt{x-2}$ ($a>3$); б) $\sqrt[5]{a+x}-\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$;

в) $\log_a\left(2x^2-4x+2+a^{x^2-2x+5}\right)\leq 4$ ($a>1$).

5.1.27. Решите данную систему уравнений.

а) $\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1, \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 2a = 3^y - 9^a \cdot 3^x, \\ y = x^2 + x. \end{cases}$

Наибольшее и наименьшее значение

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

5.1.28. а) $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{1+x}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$, $x \in (-1;+\infty)$.

5.1.29. а) $f(x) = 3a\cos 2x - 4a\sin 2x$;

б) $f(x) = (1-a)\cos 3x - (1+a)\sin 3x$;

в) $f(x) = \cos^2 2x + 12a\cos 2x - 2$;

г) $f(x) = \cos^2 2x + 6a\sin 2x + 2$.

5.1.30. а) $f(x) = ax^2 + x + 1$, $x \in [-2;3]$;

б) $f(x) = x^2 - x$, $x \in [a;a+3]$.

5.1.31. а) $f(x) = x + \dfrac{a^2}{x}$; б) $f(x) = x + \dfrac{1}{x-a}$;

в) $f(x) = \dfrac{a^4 + x^4}{x^2}$; г) $f(x) = \mathrm{tg}x + a\mathrm{ctg}x$, $x \in [\pi/6;\pi/3]$.

Определите значения параметра a, при которых имеет решение уравнение:

5.1.32. а) $x + \dfrac{1}{x} = 6y - y^2 + a, (x > 0)$; б) $y^4 - 4y^2 - \cos^2 x = a$;

в) $2^x + 2^{-x} - 2\sin y = a$;

г) $\dfrac{3\cos x + 4\sin x + 5\pi + 5}{3\sin y + 4\cos y + 5} = \arccos\dfrac{a}{3} + \arcsin\dfrac{a}{3}$.

§ 5.2. Применение производной

1. *Касательная к кривой*

Геометрический смысл производной состоит в том, что тангенс угла наклона касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x_0, равен значению производной функции в этой точке: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$ – это прямая, проходящая через эту точку и имеющая угловой коэффициент $k = f'(x_0)$. Уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Пример 1. *При каких значениях параметра* p *касательная, проведенная к графику функции* $y = x^3 - px$ *в точке графика с абсциссой* $x_0 = 1$*, проходит через точку* $M(2;3)$*?*

Решение. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(x) = 3x^2 - p$.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. При $x_0 = 1$ получим $f'(x_0) = f'(1) = 3 - p$, $f(x_0) = f(1) = 1 - p$.

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y = (3 - p)(x - 1) + 1 - p \text{ или } = (3 - p)x - 2.$$

Так как касательная проходит через точку $M(2;3)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Подставив их в уравнение, получим $3 = (3 - p)\cdot 2 - 2$ или $p = 0,5$.

Ответ. $p = 0,5$.

Пример 2. *Найти все значения параметра* a*, при которых касательная к графику функции* $y = \sin\dfrac{x+11}{2} + 1,5a - a^2$*, проведенная в его точке с абсциссой* a*, не пересекает график ни одной из двух функций* $y = 0,5x + 2$ *и* $y = -2/x$.

Решение. Функция $y(x)=\sin\dfrac{x+11}{2}+1,5a-a^2$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Так как $y(a)=\sin(0,5a+5,5)+1,5a-a^2$ и $y'(a)=0,5\cos(0,5a+5,5)$, то уравнение касательной к графику данной функции в его точке с абсциссой a будет иметь вид

$$y=0,5\cos(0,5a+5,5)\cdot(x-a)+\sin(0,5a+5,5)+1,5a-a^2.$$

Из условия отсутствия общих точек касательной и прямой $y=0,5x+2$ следует, что они параллельны. В этом случае их угловые коэффициенты равны. Приравняв их, получим уравнение $0,5\cos(0,5a+5,5)=0,5$, т.е. $\cos(0,5a+5,5)=1$. Из последнего уравнения получаем $0,5a+5,5=2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$, или $a=4\pi n-11$, $n\in\mathbb{Z}$. В таком случае уравнение касательной запишется в виде

$$y=0,5\cdot\big(x-(4\pi n-11)\big)+1,5\cdot(4\pi n-11)-(4\pi n-11)^2,\ n\in\mathbb{Z}$$

или

$$y=0,5x+(4\pi n-11)-(4\pi n-11)^2,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Так как эта прямая не пересекает график функции $y=-2/x$, то уравнение $-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{2}+(4\pi n-11)-(4\pi n-11)^2$, $n\in\mathbb{Z}$ не имеет решений. Приведем последнее уравнение к виду:

$$0,5x^2+\big((4\pi n-11)-(4\pi n-11)^2\big)\cdot x+2=0,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Полученное квадратное уравнение не будет иметь решений, если его дискриминант будет отрицателен:

$$D=\big((4\pi n-11)-(4\pi n-11)^2\big)^2-4<0.$$

Полагая $z=4\pi n-11$, $n\in\mathbb{Z}$, получим неравенство $\big(z-z^2\big)^2-4<0$ или $(z-z^2-2)(z-z^2+2)<0$. Последнее равносильное неравенству $z-z^2+2>0$, так как $z-z^2-2<0$ при всех z. Решив неравенство $z-z^2+2>0$, находим $-1<z<2$, т.е. $-1<4\pi n-11<2$, $n\in\mathbb{Z}$, что имеет место при $n=1$. Следовательно, $a=4\pi-11$.

Ответ. $a=4\pi-11$.

В следующих двух задачах используются условия касания графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, следующие из того, что в точках касания графиков совпадают значения их ординат и графики имеют общую касательную, т.е. совпадают значения производных от функций в точке касания. Отсюда следует, что абсциссы точек касания графиков могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases} \qquad (*)$$

Пример 3. *Определить значения параметра* a*, при которых имеет единственное решение система неравенств* $\begin{cases} y \le ax - x^2 - 3, \\ x \le ay - y^2 - 3. \end{cases}$

Решение. В системе координат Oxy графики функций $y = ax - x^2 - 3$ и $x = ay - y^2 - 3$ симметричны относительно прямой $y = x$, так как их уравнения получаются одно из другого заменой x на y (см. рис. 66). Для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы парабола $y = ax - x^2 - 3$ касалась прямой $y = x$.

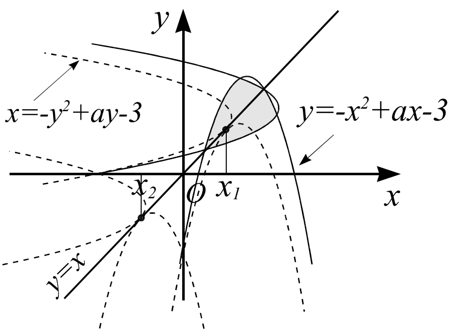


Рис. 66

В условиях данной задачи $f(x) = ax - x^2 - 3$, $g(x) = x$. Получаем (в соответствии с условиями (*)) систему уравнений $\begin{cases} ax - x^2 - 3 = x, \\ a - 2x = 1. \end{cases}$

Из второго уравнения системы выразим a: $a = 2x + 1$. Подставляя в первое уравнение, получим $(2x+1)x - x^2 - 3 = x$. Последнему уравнению удовлетворяют два значения x: $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = -\sqrt{3}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют следующие значения параметра a : $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

Ответ. $a_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a_2 = 1 + 2\sqrt{3}$.

Пример 5. *При каких значениях параметров* p *и* q *парабола* $y = 2x^2 + px + q$ *касается прямых* $y = 8x - 5$ *и* $y = 12x - 11$ *?*

Решение. Пусть прямая $y = 8x - 5$ касается параболы $y = 2x^2 + px + q$ в точке M_1 с координатами (x_1, y_1). Тогда значение производной $(2x^2 + px + q)' = 4x + p$ при $x = x_1$ будет равно угловому коэффициенту прямой $4x_1 + p = 8$ и так как M_1 – точка касания, то $y_1 = 2x_1^2 + px_1 + q$ и $y_1 = 8x_1 - 5$ или $2x_1^2 + px_1 + q = 8x_1 - 5$.

Пусть точка M_2 с координатами (x_2, y_2) – точка касания параболы со второй прямой. Тогда получаем два уравнения $4x_2 + p = 12$ и $2x_2^2 + px_2 + q = 12x_2 - 11$ по аналогии с предыдущим случаем.

Объединим полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + p = 8, & (1) \\ 4x_2 + p = 12, & (2) \\ 2x_1^2 + px_1 + q = 8x_1 - 5, & (3) \\ 2x_2^2 + px_2 + q = 12x_2 - 11. & (4) \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $x_1 - x_2 = -1$ или $x_1 = x_2 - 1$. Теперь вычтем из третьего уравнения системы четвертое: $2(x_1^2 - x_2^2) + p(x_1 - x_2) = 8x_1 - 12x_2 + 6$ или $2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + p(x_1 - x_2) = 8x_1 - 12x_2 + 6$. Подставляя в полученное уравнение $x_1 - x_2 = -1$, $x_1 = x_2 - 1$ и $p = 12 - 4x_2$, придем к уравнению $-2(x_2 - 1 + x_2) - (12 - 4x_2) = 8(x_2 - 1) - 12x_2 + 6$ или $x_2 = 2$. Откуда $p = 4$ и $q = 12x_2 - 11 - 2x_2^2 - px_2 = -3$.

Ответ. $p = 4$, $q = -3$.

2. *Критические точки*

Критическая точка – это внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует.

Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума***. ***Экстремумом функции*** называется ее значение в точках локального минимума или максимума.

Критические точки – это точки, проверяемые на экстремум. Для выяснения наличия в данной точке экстремума надо исследовать знак производной этой функции в точках, близких критической и находящихся слева и справа от нее. Если производная функции меняет знак с «плюса» на «минус», то в этой точке достигается максимум, а если с «минуса» на «плюс» – минимум.

Пример 6. *Пусть* x_1 *– точка минимума, а* x_2 *– точка максимума функции* $y(x) = -2x^3 + 3(1-2a)x^2 + 12ax - 1$. *При каких значениях параметра* a *выполняется равенство* $x_1^2 = x_2$ *?*

Решение. Так как коэффициент при x^3 отрицателен, то $x_1 < x_2$. Точки x_1 и x_2 – корни уравнения $y'(x) = -6x^2 + 6(1-2a)x + 12a = 0$. Используя теорему Виета и учитывая условие $x_1^2 = x_2$, получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_1^2 = 1 - 2a, \\ x_1^3 = -2a; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1,\ a = -0{,}5, \\ x_1 = -1,\ a = 0{,}5. \end{array} \right.$$

Первое решение не удовлетворяет условию $x_1 < x_2$. ***Ответ.*** $a = 0{,}5$.

Пример 7. *При каких значениях* a *точка* $x_0 = a$ *является точкой минимума функции* $y(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 1$?

Решение. Если $x_0 = a$ является точкой минимума, то $x_0 = a$ есть корень уравнения $y'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 0$ и при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс. Найдем корни уравнения $x^2 - (a+1)x + a = 0$. Имеем $x_1 = 1$ и $x_2 = a$, т.е. $x_0 = a$ является точкой экстремума (см. рис. 67а и 67б) и $y' = (x-1)(x-a)$.

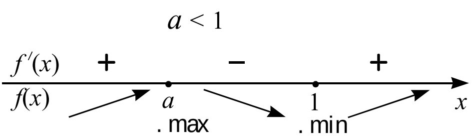


Рис. 67а

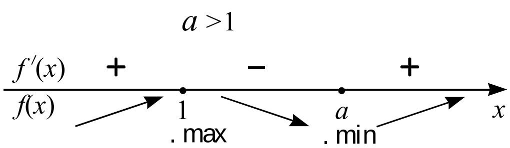


Рис. 67б

Правая из точек экстремума есть точка минимума. Следовательно, при $a>1$ точка $x_0=a$ является точкой минимума функции.

Ответ. $a>1$.

Пример 8. *Пусть* x_1 *и* x_2 *– точки, в которых равна нулю производная функции* $y=x^3-3ax^2+3(2a-1)x+1$. *Найти значения параметра* a *, при которых величина* $x_1^2+x_2^2$ *наименьшая.*

Решение. Функция $y(x)=x^3-3ax^2+3(2a-1)x+1$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $y'(x)=3x^2-6ax+3(2a-1)$. Из уравнения $y'(x)=0$ найдем критические точки функции. Уравнение $3x^2-6ax+3(2a-1)=0$ имеет корни, поскольку дискриминант $9a^2-18a+9=9(a-1)^2\ge 0$. Используя теорему Виета, получим

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$$
$$=4a^2-2(2a-1)=4a^2-4a+2=(2a-1)^2+1.$$

Следовательно, сумма $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее значение при $a=0{,}5$.

Ответ. $a=0{,}5$.

3. *Монотонность функции*

Напомним, что если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b), то $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ при $x\in(a,b)$. Это необходимые условия возрастания (убывания) функции на интервале (a,b).

Достаточные условия монотонности $f(x)$: если $f'(x)>0$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале; если $f'(x)<0$ – убывает.

Для доказательства строгого возрастания (убывания) функции на каком – либо промежутке достаточно проверить, что $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ на этом промежутке и для всех точек, кроме их конечного числа, $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$.

Пример 9. *При каких значениях параметра a функция $y(x) = \sin x - ax$ убывает на всей числовой прямой?*

Решение. Функция $y(x) = \sin x - ax$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Ее производная равна $y'(x) = \cos x - a$. Функция убывает на всей числовой прямой, если для всех x выполняется условие $y' \le 0$ или $\cos x \le a$. Это возможно, если $a \ge 1$.

Если $a = 1$, то $\cos x = 1$ при $x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. При переходе через эти точки производная не меняет знака. Следовательно, функция монотонно убывает на всей числовой прямой. ***Ответ.*** $a \ge 1$.

Пример 10. *Найти все значения p такие, что функция $y(x) = -x^3 + 3x + 5$ убывает на интервале $(p;\ p + 0{,}5)$.*

Решение. Функция $y(x) = -x^3 + 3x + 5$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Ее производная равна $y'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$. Функция убывает, если выполняется условие $y'(x) \le 0$. Неравенство $-3(x-1)(x+1) \le 0$ справедливо при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Следовательно, функция убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$. Интервал $(p;\ p + 0{,}5)$ целиком попадает в один из промежутков убывания, если либо $p + 0{,}5 \le -1$, либо $p \ge 1$, т.е. $p \in (-\infty; -1{,}5] \cup [1; +\infty)$.

Ответ. $p \in (-\infty; -1{,}5] \cup [1; +\infty)$.

Пример 11. *При каких значениях параметров a и b функция $y(x) = x^3 + ax^2 + bx$ возрастает на всей числовой прямой?*

Решение. Функция $y(x) = x^3 + ax^2 + bx$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Производная функции $y(x)$ равна $y'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Функция возрастает на всей числовой прямой, если для всех x выполняется условие $y'(x) \ge 0$ или $3x^2 + 2ax + b \ge 0$. Это возможно, если дискриминант квадратичного неравенства неотрицателен, т.е. $D = 4a^2 - 12b \le 0$. Откуда получаем $a^2 \le 3b$.

Ответ. $a^2 \le 3b$.

4. *Наибольшие и наименьшие значения функции. Оценки*

Для определения наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке используется теорема Вейерштрасса: ***функция, непрерывная на отрезке*** $[a;b]$***, имеет наибольшее и наименьшее значения, которые достигаются либо в критических точках, либо на концах отрезка***.

Для определения наибольшего и наименьшего значений функций на незамкнутом промежутке используется теорема: ***если функция, непрерывная на интервале*** $(a;b)$***, имеет в этом интервале только одну точку экстремума – точку*** x_1 ***и, если*** x_1 ***– точка максимума, то*** $f(x_1)$ ***– наибольшее значение функции*** $f(x)$ ***на интервале*** $(a;b)$***; если*** x_1 ***– точка минимума, то*** $f(x_1)$ ***– наименьшее значение функции*** $f(x)$ ***на интервале*** $(a;b)$**.**

Пример 12. *При каких положительных значениях* a *наименьшее значение функции* $y(x)=x\sqrt{x+a}$ *равно* $-6\sqrt{3}$ *?*

Решение. $D_y=[-a;+\infty)$. Функция $y(x)=x\sqrt{x+a}$ дифференцируема при $x>-a$ и $y'(x)=\sqrt{x+a}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+a}}=\dfrac{3x+2a}{2\sqrt{x+a}}$. При $x=-2a/3$ имеем $y'(x)=0$. Если $-a<x<-2a/3$, то производная отрицательна, а если $x>-2a/3$, то положительна. Следовательно, $x_0=-2a/3$ – точка минимума. На отрезке $\left[-a;-2a/3\right]$ функция является убывающей (см. рис. 68). Найдем значение функции в точке $x_0=-2a/3$; имеем $y(x_0)=-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$. Решим уравнение

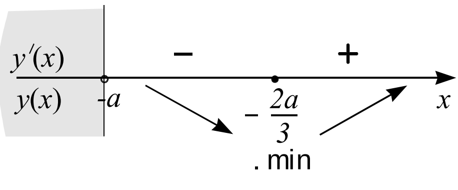


Рис. 68

$-\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=-6\sqrt{3}$. После возведения в квадрат обеих его частей получим $\dfrac{4}{27}a^3=108$ или $a=9$.

Ответ. $a=9$.

К этому же типу относятся также задачи на отыскание множества значений функции. При этом используется следующее свойство: ***непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между наибольшим и наименьшим значениями.***

Пример 13. *При каких значениях параметра a уравнение* $\operatorname{tg}^3 x + 48\operatorname{ctg} x = a$ *имеет хотя бы одно решение?*

Решение. Пусть $\operatorname{tg} x = y$. Введем функцию $f(y) = y^3 + \dfrac{48}{y}$. Функция $f(y)$ является нечетной, $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На области определения $f(y)$ дифференцируема и $f'(y) = 3y^2 - \dfrac{48}{y^2} = \dfrac{3(y^4 - 16)}{y^2}$. Для решения задачи достаточно (в силу нечетности функции) найти множество значений функции f на промежутке $(0; +\infty)$. Найдем на этом промежутке наибольшее и наименьшее значения функции.

Критические точки определяются из уравнения $f'(y) = 0$. Уравнение $\dfrac{3(y^4 - 16)}{y^2} = 0$ имеет единственный корень $y = 2$ на промежутке $(0; +\infty)$. Так как $f'(y) < 0$ при $y < 2$ и $f'(y) > 0$ при $y > 2$, то $y = 2$ – точка минимума и $f(2) = 32$.

На промежутке $(0; 2]$ функция убывает и принимает все значения от 32 до ∞, а на $[2; +\infty)$ возрастает и также принимает значения от 32 до ∞. Итак, $E_f = [32; +\infty)$, поэтому для любого значения $a \in [32, \infty)$ найдется решение уравнения $y^3 + \dfrac{48}{y} = a$. Соответственно, для любого значения y найдется x, являющийся корнем исходного уравнения, такой, что $y = \operatorname{tg} x$.

Учитывая нечетность функции $f(y)$, заключаем, что исходное уравнение имеет решение при $a \in (-\infty, -32] \cup [32, \infty)$.

Ответ. $a \in (-\infty, -32] \cup [32, \infty)$.

Пример 14. *Для каждого значения a определить число корней уравнения* $x^3 - 3x^2 - a = 0$.

Решение. Для определения зависимости числа корней уравнения от значений a, выясним взаимное расположение графика функции $f(x)=x^3-3x^2$ и прямой $y=a$ при всех $a\in\mathbb{R}$.

Для построения графика проведем необходимое исследование функции $f(x)=x^3-3x^2$. Функция обращается в нуль в двух точках $x=0$ и $x=3$. Найдем участки возрастания (убывания) функции $f(x)$. Так как

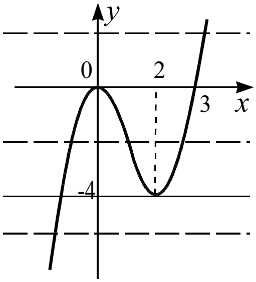


Рис. 69

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, то $f'(x)<0$ при $0<x<2$; $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=2$; $f'(x)>0$ при $x<0$ и $x>2$. Таким образом, непрерывная функция $y=f(x)$ в точке $x=2$ имеет локальный минимум, а в точке $x=0$ – локальный максимум, причем $f(0)=0$, $f(2)=-4$. Кроме того, функция убывает на $[0;2]$ и возрастает на промежутках $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$.

Анализируя рисунок взаимного расположения графиков функций $y=f(x)$ и $y=a$ (см. рис. 69), приходим к следующему ответу.

Ответ. Если $a>0$, то уравнение имеет один корень; если $a=0$, то два различных корня; если $-4<a<0$, то – три; если $a=-4$, то – два; если $a<-4$, то один корень.

Пример 15. *Найти все значения параметра a, для которых существует только одно число b такое, что $b^2(b+a)=1$.*

Решение. Рассмотрим функцию $f(b)=b^2(b+a)=b^3+ab^2$, где переменная a является параметром. Функция $f(b)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Для решения задачи необходимо найти такие значения параметра a, при которых функция $f(b)$ принимает значение 1 только при одном значении переменной.

Найдем производную $f(b)$: $f'(b)=3b^2+2ab=3b\left(b+2a/3\right)$.

В зависимости от знака a возможны следующие случаи:

1) $a>0$; 2) $a=0$; 3) $a<0$.

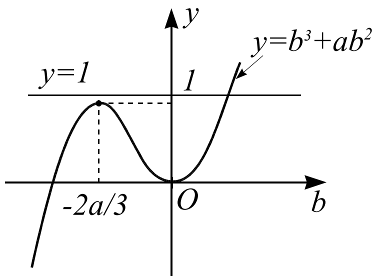


Рис. 70

1. Пусть $a > 0$ (см. рис. 70). Найдем значения функции $f(b)$ в критических точках: $f(0) = 0$ и $f\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3$. Значение 1 функция $f(b)$ принимает только один раз, если значение функции в точке локального максимума меньше 1, т.е. $\frac{4}{27}a^3 < 1$. Отсюда с учетом условия $a > 0$ получаем $0 < a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

2. При $a = 0$ функция $f(b) = b^3$ является возрастающей ($f'(b) = 3b^2 \geq 0$) и каждое свое значение из множества значений E_f принимает один раз. Так как $E_f = \mathbb{R}$, то значение 1 принимается ею только один раз при $b = 1$ (см. рис. 71).

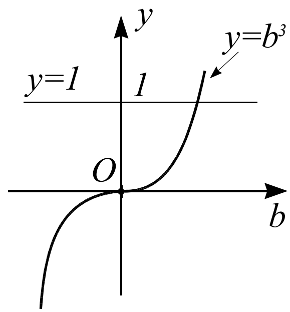


Рис. 71

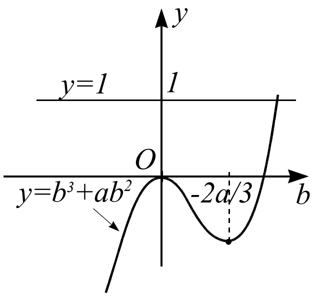


Рис. 72

3. При $a < 0$ значение $f(0) = 0$ (0 – точка локального максимума (см. рис. 72)), поэтому значение 1 функция $f(b)$ принимает только один раз при всех $a < 0$.

Объединим результаты всех трех случаев. ***Ответ.*** $a < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Пример 16. *Найти все такие числа* b, *для которых существует ровно три различных числа* a *таких, что* $a(b + a^2) = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(a)=a^3+ab$. Переменная b является параметром. Функция $f(a)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Необходимо найти значения b, при которых $f(a)$ принимает значение 1 ровно три раза. При $b>0$ $f'(a)=3a^2+b>0$. Этот случай не удовлетворяет условию задачи, так как функция является возрастающей. При $b<0$ функция $f(a)$ имеет два экстремума $a_1=-\sqrt{-b/3}$ и $a_2=\sqrt{-b/3}$. Значения $f(a_1)=-\dfrac{2b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$ и $f(a_2)=\dfrac{2b}{3}\sqrt{-\dfrac{b}{3}}$. Условию задачи удовлетворяют значения b, для которых одновременно выполняются три условия $f(a_1)>1$; $f(a_2)<1$; $b<0$.

Ответ. $b<-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Пример 17. *При каких значениях параметра a максимум функции $y(x)=x^3-3(a-7)x^2+3(a^2-9)x+1$ достигается в точке, абсцисса которой положительна?*

Решение. Если точка x_0 – точка максимума, то x_0 – корень уравнения $y'(x)=0$ или $3x^2-6(a-7)x+3(a^2-9)=0$ и при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус. Найдем корни уравнения $x^2-2(a-7)x+(a^2-9)=0$. При $58-14a>0$ или $29/7>a$ имеем $x_1=(a-7)-\sqrt{58-14a}$ и $x_2=(a-7)+\sqrt{58-14a}$. Так как коэффициент при x^3 положительный, то левый экстремум есть точка максимума. Решим неравенство $x_1>0$ или $a-7>\sqrt{58-14a}$ (*). Так как должно выполняться условие $a<\dfrac{29}{7}$, то неравенство (*) не имеет смысла, поскольку левая его часть отрицательна, а правая неотрицательна. Следовательно, неравенство (*) не имеет решений.

Ответ. Таких a не существует.

Для решения текстовых задач на отыскание наибольшего или наименьшего значений следует, исходя из условия задачи, составить функцию, взяв в качестве аргумента один из параметров (остальные выразить через него в соответствии с условиями задачи). Далее следует определить промежуток изменения выбранного аргумента и найти наибольшее или наименьшее значения функции на полученном промежутке.

Пример 18. *В шар радиуса R вписан цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Найти значение этой площади.*

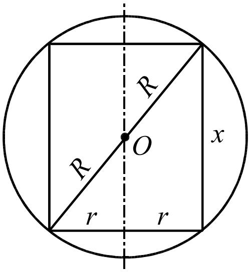


Рис. 73

Решение. Рассмотрим осевое сечение (см. рис. 73). Пусть x – высота цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра r равен

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Площадь боковой поверхности цилиндра выражается формулой $S = 2\pi rx$ или

$$S(x) = 2\pi x\left(\frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2}\right).$$

Вычислим наибольшее значение функции $S(x)$ при условии, что x изменяется от 0 до $2R$. Функция $S(x)$ определена на $[0;2R]$, дифференцируема на $[0;2R)$ и $S'(x) = \dfrac{\pi(4R^2 - 2x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Определим наибольшее значение функции $S(x)$ на $[0;2R]$. На концах отрезка $[0;2R]$ значения функции $S(x)$ равны 0. Производная $S'(x) = 0$ при $x = R\sqrt{2}$. Так как $S(R\sqrt{2}) = 2\pi R^2$, то $x = R\sqrt{2}$ – точка локального максимума.

Ответ. Наибольшее значение $S = 2\pi R^2$.

Пример 19. *Найти максимальный объем конуса, образующая которого равна L.*

Решение. Рассмотрим осевое сечение (см. рис. 74). Обозначим за x высоту конуса. Тогда радиус основания r равен $\sqrt{L^2 - x^2}$ при условии, что x изменяется от 0 до L. Объем конуса выразится формулой $V = \dfrac{1}{3}x \cdot S_{\text{осн.}}$ или $V = \dfrac{1}{3}\pi x r^2 = \dfrac{1}{3}\pi x(L^2 - x^2)$. Найдем наибольшее значение функции $V(x)$ на $[0; L]$. Функция $V(x)$ определена и дифференцируема на $[0; L]$ и $V'(x) = \frac{1}{3}\pi L^2 - \pi x^2$. На концах отрезка

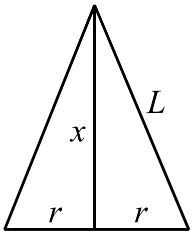


Рис. 74

$[0; L]$ значение функции $V(x)$ равны 0. $V'(x) = 0$ при $x = L/\sqrt{3}$ и $V\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi L^3$. Следовательно, точка $x = L/\sqrt{3}$ – точка локального максимума функции $V(x)$.

Ответ. $V_{max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi L^3$.

Задачи для самостоятельного решения

5.2.1. Определите значения параметра a, при которых прямая $y(x)$ является касательной к графику функции $f(x)$, если:

а) $y(x) = 3x + a$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$;

б) $y(x) = ax - 5$, $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$;

в) $y(x) = 8x + a$, $f(x) = x^4 + 4x$; г) $y(x) = ax + \frac{1}{\sqrt{a}}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

5.2.2. При каких значениях параметра a касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 + ax^2$ в точке графика с абсциссой $x_0 = -1$, проходит через точку $N(3; 2)$?

5.2.3. Определите значения чисел p и q, при которых парабола:

а) $y = x^2 + px + q$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$;

б) $y = -3x^2 + px + q$ касается прямых $y = -5x + 4$ и $y = 7x + 4$.

5.2.4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение:

а) $\frac{1}{x} + 4x = a$ имеет одно решение; б) $\frac{4}{x} + x = a$ не имеет решений;

в) $e^{2x} + 2e^x - 60x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение.

5.2.5. Найти все значения параметра a такие, что функция $f(x)$:

а) возрастает на $\mathbb{R}$, если $f(x) = \frac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1$;

б) убывает на $\mathbb{R}$, если $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{a+4}}{1-a}-1\right)x^5+3x+\ln 5$;

в) убывает на $\mathbb{R}$ и не имеет критических точек, если

$$f(x)=a\sin x-10x+\sin 7x+4ax.$$

5.2.6. Найдите все значения параметра:

а) t такие, что функция $y(x)=2x^3-3x^2+7$ возрастает в интервале $(t-1;t+1)$;

б) p такие, что функция $y(x)=-x^3+3x+5$ убывает в интервале $\left(p;p+0,5\right)$.

5.2.7. а) При каких значениях параметра b точка $x_0=b$ является точкой максимума функции $y(x)=\dfrac{2}{3}x^3-(b-2)x^2-4bx+3$?

б) Пусть x_1- точка максимума и x_2-точка минимума функции $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$. При каких значениях параметра a справедливо равенство $x_1^2=x_2$?

5.2.8. а) Определите в зависимости от значений параметра a количество корней уравнения $ae^x=x^3$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $ax^2=\ln x$ имеет один корень?

5.2.9. При каких положительных значениях k наибольшее значение функции $y=(k-x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$?

5.2.10. При каких значениях параметра p:

а) наименьшее на промежутке $[-1;0]$ значение кубического трехчлена x^3-2px^2+1 достигается на правом конце промежутка;

б) наибольшее на промежутке $[0;1]$ значение кубического трехчлена $x^3-4px^2-10p^3$ достигается на левом конце промежутка;

в) наименьшее на промежутке $[2;3]$ значение функции $y(x)=2x-p/x$ достигается на левом конце промежутка;

г) наибольшее на промежутке $[1;2]$ значение функции $y(x) = px - 2/x$ достигается на правом конце промежутка.

5.2.11. В каких пределах изменяется величина $x^2 - 3y$ при условии, что $\log_{\frac{2}{x-2}}\left(-y-2\right) \geq 1$?

5.2.12. Найдите все значения параметра a, при которых множества значений функции $f(x) = xe^{x+1}$ и $g(x) = x^4 - 4x + a^3 + a$ совпадают.

Геометрические задачи

5.2.13. Из всех прямоугольников данной площади S найти тот, периметр которого наименьший.

5.2.14. Сумма двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен 30°. Каковы должны быть длины сторон этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

5.2.15. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны a. Найти большее основание трапеции наибольшей площади.

5.2.16. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади S, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

5.2.17. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. Найдите длину бокового ребра, при котором объем призмы наибольший.

5.2.18. Рассматриваются всевозможные треугольные призмы, каждая боковая грань каждой из которых имеет периметр, равный a. Найдите среди них призму наибольшего объема (в ответе укажите длину бокового ребра призмы).

5.2.19. Найдите наибольший объем цилиндра, вписанного в конус высотой H и с радиусом основания R.

5.2.20. Найдите высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

5.2.21. Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара равен R. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

5.2.22. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Текстовые задачи

5.2.23. Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент времени расстояние между движущимися точками будет наименьшим, если в начальный момент они занимают положения $(-3;0)$ и $(0;5)$?

5.2.24. Мотоциклист выезжает из пункта A и движется с постоянным ускорением 12 $км/час^2$ (начальная скорость равна нулю). Достигнув скорости v $км/час$, он едет с этой скоростью 25 *км*, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 $км/час$, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью v $км/час$. При какой скорости v мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта A?

5.2.25. Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью $40000 м^2$. Затраты на постройку одного дома общей жилой площадью s складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{s}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $s\sqrt{s}$. При строительстве дома жилой площадью $400 м^2$ 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо построить домов, чтобы затраты были наименьшими?

§5.3. Использование определенного интеграла для вычисления площадей

Пример 1. *Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найти такие числа* a *и* b*, при которых выполняется равенство:* а) $\int_{-1}^{1}(ax+b)dx=0$; б) $\int_{0}^{a}(2x-4)dx=0$;

в) $\int_{-4}^{a}(|x|-4)dx=0$; г) $\int_{0}^{a}(x-1)^3\,dx=0$.

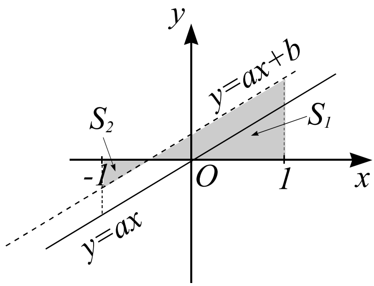


Рис. 75

Решение. а) Линейная функция $f(x)=ax+b$ на своей области определения меняет знак не более одного раза (если функция – константа, то она не меняет знака). Из геометрического смысла определенного интеграла для функции, меняющей знак, следует, что должны быть равны площади фигур, ограниченных частями графика функции (S_1 и S_2) (см. рис. 75), отрезками оси Ox и вертикальными прямыми $x=-1$ и $x=1$. Это возможно в том случае, если график линейной функции проходит через начало координат, т.е. при $b=0$ и $a\in\mathbb{R}$.

Решение. б) Функция $f(x)=2x-4$ пересекает ось Ox в точке $x=2$. По аналогии с решением предыдущего пункта задачи, получаем, что равенство нулю интеграла возможно при $S_1=S_2$ (см. рис. 76). Последнее равенство возможно только в случае равенства соответствующих треугольников или при $a=4$.

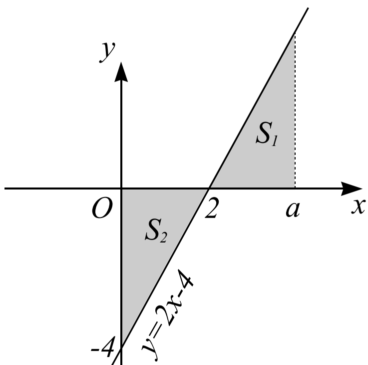


Рис. 76

Решение. в) На промежутке $(-4;4)$ функция $f(x)=|x|-4$ отрицательна, при $x>4$ положительна. Следовательно, необходимо найти такое значение параметра a, при котором равны площади S_1 и S_2 фигур (треугольников) ABC и CDE (см. рис. 77). Так как $S_1=16$, то площадь прямоугольного равнобедренного треугольника CDE

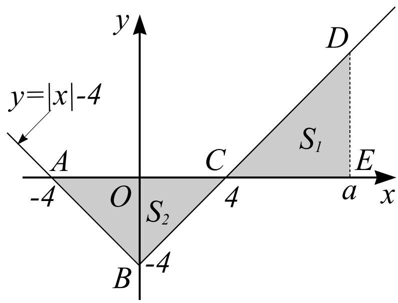


Рис. 77

тоже должна равняться 16. Это возможно, если $AB=CE=4\sqrt{2}$, а, значит, $a=4+4\sqrt{2}$.

Решение. г) По аналогии с предыдущей задачей, должны быть равны площади S_1 и S_2: $S_1=\int\limits_0^1 (x-1)^3\,dx$, $S_2=\int\limits_1^a (x-1)^3\,dx$ (см. рис. 78). Так как график функции $f(x)=(x-1)^3$ симметричен относительно точки $C(1;0)$, то равенство S_1 и S_2 возможно, если $OC=CD$, т.е. при $a=2$.

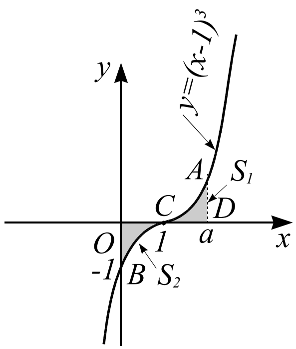


Рис. 78

Ответ. **а)** $b=0$; $a\in\mathbb{R}$; **б)** $a=4$; **в)** $b=4(1+\sqrt{2})$; **г)** $a=2$.

Пример 2. *Найти все значения* a $(a>0)$, *для которых выполняется неравенство* $\int\limits_0^a (1-x)dx \le \frac{1+a}{4}$.

Решение. Имеем $\int\limits_0^a (1-x)dx = \int\limits_0^a dx - \int\limits_0^a xdx = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = a-\frac{a^2}{2}$.

Таким образом, искомые значения a удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a - \dfrac{a^2}{2} \le \dfrac{1+a}{4}. \end{cases}$$ Решениями системы являются $a \in (0;\, 0{,}5] \cup [1;+\infty)$.

Ответ. $(0;\, 0{,}5] \cup [1;+\infty)$.

Пример 3. *Найти все положительные значения параметра* a, *для которых* $\int\limits_1^2 (a^2 - (4-4a)x + 4x^3)dx \le 12$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^2 (a^2 - (4-4a)x + 4x^3)dx = a^2\int\limits_1^2 dx - (4-4a)\int\limits_1^2 xdx + 4\int\limits_1^2 x^3 dx =$$

$$= a^2 x\Big|_1^2 - (4-4a)\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 + 4\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2.$$

Таким образом, искомые значения a удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} a > 0, \\ (a+3)^2 \le 12. \end{cases}$

Следовательно, $a \in (0;\, 2\sqrt{3} - 3]$. ***Ответ.*** $(0;\, 2\sqrt{3} - 3]$.

Пример 4. *Найти все значения* a $(a > 0)$, *для которых площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = e^x$, $y = 0$, $x = -a$, $x = a$, *больше* $1{,}5$.

Решение. Криволинейная трапеция $ABCD$ ограничена линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = -a$ и $x = a$ (см. рис. 79). Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла, ее площадь S можно найти по формуле $S = \int\limits_{-a}^{a} e^x dx$. Так как

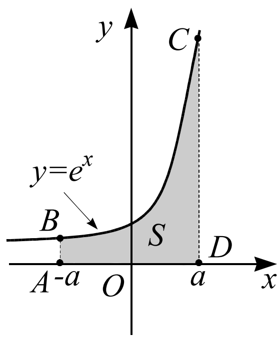


Рис. 79

$\int_{-a}^{a} e^x dx = e^x \Big|_{-a}^{a} = e^a - e^{-a}$, то заданное условие равносильно неравенству $e^a - e^{-a} > 1{,}5$. Полагая $y = e^a$, где $y > 0$, приходим к неравенству $y - \frac{1}{y} > \frac{3}{2}$, которое на промежутке $(0;+\infty)$ равносильно неравенству $y > 2$ или $e^a > 2$. Следовательно, $a > \ln 2$.

Ответ. $a > \ln 2$.

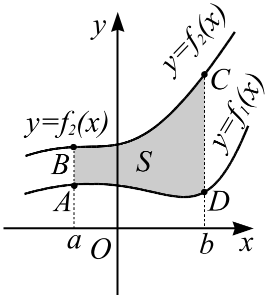


Рис. 80

В общем случае справедливо следующее утверждение (см. рис. 80).

Площадь S фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – заданные непрерывные функции, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx .$$

Пример 5. *При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2x-1}$, $x = 2$, $x = a$, равна $\ln(4/\sqrt{5})$?*

Решение. Кривые $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2x-1}$ пересекаются в точке с координатами $(1;1)$. С учетом того, что фигура, ограниченная данными линиями, должна быть замкнутой, рассмотрим возможные случаи расположения прямой $x = a$ относительно прямых $x = 0{,}5$, $x = 1$ и $x = 2$:

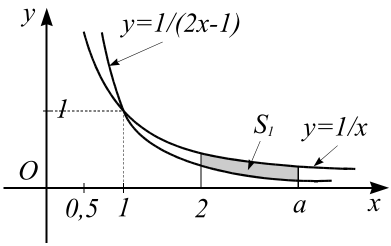


Рис. 81

1) $a > 2$; 2) $1 < a < 2$;
3) $0{,}5 < a < 1$.

1) При $a>2$ площадь фигуры S_1 (см. рис. 81) равна $\int\limits_2^a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{2x-1}\right|\Bigg|_2^a==\frac{1}{2}\ln\frac{a^2}{2a-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3a^2}{4(2a-1)}.$$

Из условия $\frac{1}{2}\ln\frac{3a^2}{4(2a-1)}=\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$ следует, что $\ln\frac{3a^2}{4(2a-1)}=\ln\frac{16}{5}$ или $15a^2-128a+64=0$. Откуда $a_1=8$, $a_2=8/15$. Условию $a>2$ удовлетворяет значение $a=8$.

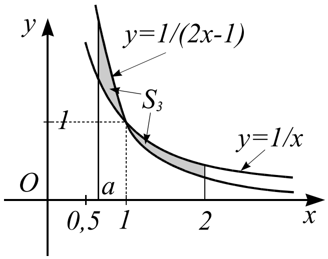


Рис. 82

2) Если $1<a<2$ (см. рис. 82), то искомого значения a не существует, поскольку площадь фигуры будет меньше рассмотренной в предыдущем пункте (проверьте самостоятельно).

3) Если $0,5<a<1$, то искомая площадь может быть вычислена как суммарная площадь двух фигур:

$$S_3=\int\limits_a^1\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{x}\right)dx+\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{x^2}\right|\Bigg|_a^1+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{2x-1}\right|\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln\frac{2a-1}{a^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{4a^2}{3(2a-1)}.$$

Далее, $\frac{1}{2}\ln\frac{4a^2}{3(2a-1)}=\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$ или $\ln\frac{4a^2}{3(2a-1)}=\ln\frac{16}{5}$. Потенцируя, получим уравнение $5a^2-24a+12=0$, имеющее корни $a_{1,2}=\frac{12\pm 2\sqrt{21}}{5}$. Условию $0,5<a<1$ удовлетворяет $a=\frac{12-2\sqrt{21}}{5}$.

Ответ. $a=8$ и $a=\frac{12-2\sqrt{21}}{5}$.

Пример 6. *При каком значении a прямая $y=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=2+x-x^2$, пополам?*

Решение. Парабола $y=2+x-x^2=-(x-0,5)^2+2,25$ получается из параболы $y=-x^2+2,25$ сдвигом вдоль оси Ox (см. рис. 83), поэтому искомая прямая $y=a$ разделит пополам площади под обеими параболами. Вычислим площадь S под графиком функции $y=-x^2+2,25$. Имеем

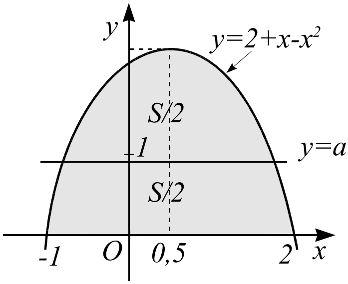


Рис. 83

$$\int_{-1,5}^{1,5}\left(\frac{9}{4}-x^2\right)dx=\left(\frac{9}{4}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1,5}^{1,5}=\frac{9}{2}.$$

Теперь определим, при каком значении b площадь под графиком параболы $y=-x^2+b$ равна $S/2=2,25$. Тогда искомое число a будет равно $2,25-b$.

Находим $\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\left(bx-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}=\frac{4}{3}b\sqrt{b}$. Таким образом, $\frac{4}{3}b\sqrt{b}=\frac{9}{4}$, если $b=\frac{9}{4\sqrt[3]{4}}$. Отсюда получим $a=\frac{9}{4}-\frac{9}{4\sqrt[3]{4}}=$ $=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Ответ. $a=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Пример 7. *Найти все положительные значения параметра b, при которых площадь фигуры, ограниченной параболами $y=1-x^2$ и $y=bx^2$, равна a. При каких значениях a задача имеет решение?*

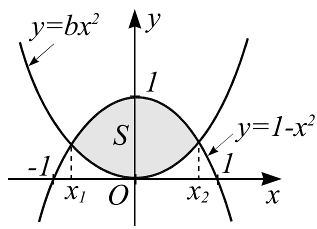


Рис.84

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения парабол $y=1-x^2$ и

$y = bx^2$ (см. рис. 84). Для этого решим квадратное уравнение $1 - x^2 = bx^2$. Его корнями являются числа $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{b+1}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{b+1}}$. Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболами.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left((1 - x^2) - bx^2\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - (1+b)x^2\right) dx = \left(x - (1+b)\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= (x_2 - x_1) - (1+b)\frac{(x_2^3 - x_1^3)}{3} = \frac{4}{3\sqrt{b+1}}.$$

Решив уравнение $\dfrac{4}{3\sqrt{b+1}} = a$, получим $b = \dfrac{16}{9a^2} - 1$.

Из условий $a > 0$, $b > 0$ следует, что решение задачи существует при $a \in (0; 4/3)$.

Ответ. $b = \dfrac{16}{9a^2} - 1$; $a \in (0; 4/3)$.

Пример 8. *Найти все значения* a $(a > 0)$, *при которых площадь фигуры, ограниченной линиями* $y = (1 + a^2)^2 x^2 - a$ *и* $y = 0$, *является наибольшей, и определить ее значение.*

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = (1 + a^2)^2 x^2 - a$ и прямой $y = 0$. Корнями квадратного уравнения $(1 + a^2)^2 x^2 - a = 0$ являются числа $x_1 = -\dfrac{\sqrt{a}}{1 + a^2}$ и $x_2 = \dfrac{\sqrt{a}}{1 + a^2}$. Найдем искомое значение площади: $S = -\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \left((1 + a^2)^2 x^2 - a\right) dx =$

$$= \left(-(1 + a^2)^2 \frac{x^3}{3} + ax \right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = -(1 + a^2)^2 \frac{(x_2^3 - x_1^3)}{3} + a(x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(-(1 + a^2)^2 \frac{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}{3} + a \right). \qquad (*)$$

Поскольку $x_2 - x_1 = \dfrac{2\sqrt{a}}{1+a^2}$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = -\dfrac{a}{(1+a^2)^2}$ и

$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = \dfrac{a}{(1+a^2)^2}$, то, подставив в (*), получим $S(a) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{a}}{1+a^2}$. Найдем наибольшее значение функции $S(a)$.

Имеем $S'(a) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{1+a^2}\left(\dfrac{3(1+a^2) - 4a^2}{1+a^2}\right) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{1+a^2}\left(\dfrac{3-a^2}{1+a^2}\right) = 0$.

Производная равна нулю при $a = 0$ и $a = \sqrt{3}$. При переходе через значение $a = \sqrt{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, в этой точке достигается максимум $S(a)$ и $S(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Ответ. $S_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ при $a = \sqrt{3}$.

Пример 9. *Найти наименьшее значение площади фигуры, ограниченной линиями* $y = x^2 + 2x - 3$ *и* $y = kx + 1$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$. Для этого решим уравнение

$x^2 + 2x - 3 = kx + 1$ или

$$x^2 + (2-k)x - 4 = 0.$$

Дискриминант $D = \dfrac{k^2}{4} - k + 5 > 0$, поэтому уравнение при всех значениях k имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{k-2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - k + 5}.$$

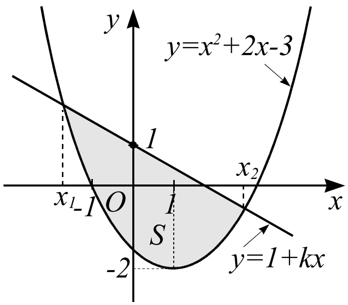


Рис. 85

Вычислим площадь S фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = kx + 1$ (см. рис. 85):

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left(kx+1-(x^2+2x-3)\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(-x^2+(k-2)x+4\right)dx=$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}x^2dx+(k-2)\int_{x_1}^{x_2}xdx+4=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_1}^{x_2}+(k-2)\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2}+4x\Big|_{x_1}^{x_2}=$$

$$=\frac{x_1^3-x_2^3}{3}+(k-2)\frac{x_2^2-x_1^2}{2}+4(x_2-x_1)=$$

$$=(x_2-x_1)\left[\frac{-x_1^2-x_1x_2-x_2^2}{3}+(k-2)\frac{x_2+x_1}{2}+4\right].$$

Согласно теореме Виета для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2+(2-k)x-4=0$, $x_2+x_1=k-2$, $x_2x_1=-4$. Значит, ${x_2}^2+{x_1}^2+x_2x_1=(k-2)^2+4$. Из формул для x_1 и x_2 получим

$$x_2-x_1=2\sqrt{\frac{k^2}{4}-k+5}=\sqrt{k^2-4k+20}\,.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение для S, имеем

$$S=\frac{(k^2-4k+20)^{3/2}}{6}=\frac{\left(16+(k-2)^2\right)^{3/2}}{6}\,.$$

Минимальная площадь достигается при $k=2$ и $S_{min}=\frac{16^{3/2}}{6}=\frac{32}{3}$.

Ответ. $S_{min}=32/3$ при $k=2$.

Задачи для самостоятельного решения

5.3.1. Найдите все числа a и b, при которых функция $f(x)$ удовлетворяет заданным условиям:

а) $f(x)=a\cdot 3^x+b$, $f'(0)=2$ и $\int_1^2 f(x)dx=12$;

б) $f(x)=a\sin\pi x+b$, $f'(1)=2$ и $\int_0^2 f(x)dx=4$.

5.3.2. Найдите все значения a $(a > 0)$, для которых выполняется неравенство:

а) $\int\limits_0^a (2 - 4x + 3x^2)dx \le a$; б) $\int\limits_1^2 (a^2 + (4 - 4a)x + 4x^3)dx \le 12$.

5.3.3. Найдите все решения уравнения, принадлежащие отрезку d:

а) $\int\limits_0^a \cos(x + a^2)dx = \sin a$, $d = [2;3]$;

б) $\int\limits_{-a}^a \cos(x + 2a^2 - a)dx = -\sin 2a$, $d = [-1{,}5;-0{,}5]$.

5.3.4. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найдите такие числа a и b, при которых выполняется равенство:

а) $\int\limits_{-1}^1 (2x + b)dx = 0$; б) $\int\limits_{-4}^a (2 - |x|)dx = 0$;

в) $\int\limits_{-2}^0 (x - a)^3 dx = 0$; г) $\int\limits_{-2}^a \arcsin\frac{x}{2}dx = 0$;

д) $\int\limits_a^b (x + 3)dx = 0$ $(b > a)$; е) $\int\limits_{-\pi/2}^a \cos xdx = 0$; ж) $\int\limits_a^{a+b} \sin xdx = 0$.

5.3.5. Используя геометрический смысл определенного интеграла, вычислите: а) $\int\limits_{-1}^1 kxdx$; б) $\int\limits_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}dx, a > 0$.

5.3.6. Для каждого значения параметра a найдите значение определенного интеграла:

а) $\int\limits_{-2}^a f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \le 0, \\ x^2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$;

б) $\int\limits_{-\pi/2}^a f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \le \pi/4, \\ \sin x, \text{ если } x > \pi/4; \end{cases}$

в) $\int\limits_{-3}^a (|x| + |x - 1|)dx$; г) $\int\limits_1^2 (|x| + |x - a|)dx$.

5.3.7. Найдите значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной кривой

а) $y = \sin 2x$, прямыми $x = \pi/6$, $x = a$ и осью абсцисс, равна $0{,}5$;

б) $y = \cos 5x$, прямыми $x = \pi/30$, $x = a$ и осью абсцисс, равна $0{,}2$.

5.3.8. а) Найдите все такие a, что площадь, ограниченная линиями $y \cdot x^2 = 4$, $x = 2$, $x = a$, $y = 0$, вдвое больше, чем площадь, ограниченная линиями $y \cdot x^2 = 4$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

б) Найдите все такие a, что площадь, ограниченная линиями $y \cdot \sqrt{x} = 2$, $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, вдвое меньше, чем площадь, ограниченная линиями $y \cdot \sqrt{x} = 2$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

в) Найдите все положительные значения параметра b, при которых площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = b\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{2 - x}$, равна a. При каких значениях a задача имеет решение?

5.3.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + bx + c$ и касательными $y = 4x - 13$, $y = -4x + 3$, проведенными к этой параболе.

5.3.10. Дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0$, $x = a$ ($a > 0$) и $y = x^3$. Какую часть площади трапеции составляет площадь треугольника, отсекаемого от данной трапеции касательной к линии $y = x^3$ в точке с абсциссой $x = 2a/3$.

5.3.11. Найдите все значения параметра $a\,(a \ge 1)$, при которых площадь:

а) фигуры, ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и параболами $y = ax^2$, $y = 0{,}5ax^2$, будет наибольшей.

б) криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = xe^{-2x}$ и прямыми $x = a$, $x = a + 0{,}5$ и $y = 0$, будет наибольшей.

5.3.12. а) Найдите наибольшее значение площади фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + \cos x$, $y = \sin(x/2)$, $x = a$, $x = a + \pi$.

б) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = \sin 2x - 2$, $x = a$, $x = a + \pi/3$.

5.3.13*. Докажите лемму:

Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=c$, $x=b$ ($b>c$), графиком дифференцируемой монотонной функции $f(x)$ и прямой $y=f(a)$, где $a\in[c;b]$, достигает своего наименьшего значения в том случае, если $y=f\left(\frac{b+c}{2}\right)$.

5.3.14. Найдите значения параметра a, при которых будет наименьшей площадь фигуры, ограниченной:

а) прямыми $y=0$, $x=0$, $x=1$ и параболой $y=a^2x^2-ax+1$;

б) графиком кривой $y=\frac{x^3}{3}-ax^2+a$; прямыми $x=0$, $x=2$ и осью абсцисс.

5.3.15. Найдите значение параметра a, при котором прямая $y=a$ делит фигуру, ограниченную линиями $y=x^2+1$ и $y=5$, на две равновеликие части.

5.3.16. Через данную точку $(a;b)$, лежащую внутри параболы $y=x^2$, проведите прямую, отсекающую от внутренней области параболы сегмент наименьшей площади. Найдите значение этой площади.

5.3.17. а) Фигура F на плоскости Oxy, ограниченная графиками функций $y=3e^{ax}$ и $y=7-2e^{-ax}$, имеет единственную общую точку с прямой $y=9x+3$. Найдите значение a и площадь указанной фигуры.

б) Пусть M – множество плоскости Oxy с координатами $(x;y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найдите площадь фигуры M.

Фигура F на плоскости Oxy состоит из точек множества M, для координат которых неравенство $t^2+2t(x-2)+7-y>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найдите площадь фигуры F.

§5.4. Использование симметрии аналитических выражений

К этой группе задач можно отнести такие, в которых требуется установить значения параметра, при которых уравнение (система или неравенство) имеет «*единственное решение*», «*четное число решений*» или «*нечетное число решений*». Практически всегда подобные задачи имеют характерную особенность: их условия не изменяются либо при замене знака одной или нескольких переменных на противоположный («симметрия» относительно знака), либо при перестановке нескольких переменных («симметрия» относительно перестановки переменных).

При решении задач такого рода используется следующий порядок действий:

во-первых, выполняется проверка на симметрию;

во-вторых, из проверки выполнения ***необходимых условий*** находятся допустимые значения параметра (при «симметрии» относительно знака переменной подставляется ее нулевое значение; при «симметрии» относительно перестановки переменных все переменные обозначают одной буквой);

в-третьих, проверяется ***достаточность условий***, т.е. для найденных допустимых значений параметра выполняется проверка того, что при полученных значениях параметра уравнение (система и т.д.) действительно имеет требуемое число решений.

Замечание. Последний этап заключается либо в доказательстве существования требуемого числа решений, либо в его опровержении.

Для иллюстрации приведенного алгоритма рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *При каком значении* a *уравнение* $x^{10}-a|x|+a^2-a=0$ *имеет единственное решение?*

Решение. Поскольку $x^{10}-a|x|+a^2-a=(-x)^{10}-a|-x|+a^2-a$, то, если число x_0 является корнем данного уравнения, то и число $-x_0$ также корень. Единственное решение будет, если $x_0=-x_0=0$.

Подставив $x_0=0$ в уравнение, найдем допустимые значения параметра a. Из уравнения $a^2-a=0$ следует, что $a=0$ или $a=1$.

Проверим, какие из условий $a = 0$ и $a = 1$ являются достаточными для данной задачи. Для этого подставим их в уравнение.

При $a = 0$ имеем $x^{10} = 0$ или $x = 0$. При $a = 1$ уравнение $x^{10} - |x| = 0$ имеет три корня $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. ***Ответ.*** $a = 0$.

Пример 2. *Найти значения параметра* a *, при которых уравнение*

$$(|x| - 4)^2 + a||x| - 4| + 4 = 0$$

имеет ровно 7 *действительных корней, и найти эти корни.*

Решение. Функция $y(x) = (|x| - 4)^2 + a||x| - 4| + 4$ является четной, т.е. $y(x) = y(-x)$. Из симметрии по переменной x следует, что нечетное число корней будет, если один из них равен нулю. Подставляя $x = 0$ в уравнение, получим $20 + 4a = 0$ или $a = -5$.

Проверим, что условие $a = -5$ является достаточным для данной задачи. Подставляя это значение a в уравнение, получим

$$(|x| - 4)^2 - 5||x| - 4| + 4 = 0.$$

Положим $y = |x| - 4$. Тогда $y^2 - 5|y| + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y < 0, \\ y^2 + 5y + 4 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 - 5y + 4 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$.

Итак, $y_1 = -1$; $y_2 = -4$, $y_3 = 1$, $y_4 = 4$. Решив четыре соответствующих уравнения $y_i = |x| - 4, \ (i = 1,2,3,4)$, получим значения x.

Ответ. При $a = -5$; $x \in \{-8; -5; -3; 0; 3; 5; 8\}$.

Пример 3. *Найти все значения параметра* a *, при которых имеет единственное решение система уравнений* $\begin{cases} e^x + e^{-x} + x^2 = y + a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Решение. Заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-x_0, y_0)$ – также решение. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы $-x_0 = x_0$, т.е. $x_0 = 0$. Подставив это значение неизвестной x в систему, получим:

$$\begin{cases} e^0 + e^{-0} + 0^2 = y + a, \\ 0^2 + y^2 = 4; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2 = y + a, \\ y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4, \\ y = -2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Допустимыми значениями параметра являются лишь значения $a = 0$ и $a = 4$.

Пусть $a = 4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} e^x + e^{-x} + x^2 = y + 4, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \le 2$ и $|y| \le 2$. Покажем, что кроме пары $(0; -2)$ существуют еще решения исходной системы уравнений. Выразив y из второго уравнения, получим $y = \sqrt{4 - x^2}$ или $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Пусть $y = \sqrt{4 - x^2}$ и $x \in [0; 2]$. Подставив y в первое уравнение, получаем $e^x + e^{-x} = 4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}$. Рассмотрим **<u>непрерывную</u>** функцию $f(x) = e^x + e^{-x} - 4 + x^2 - \sqrt{4 - x^2}$. Так как $f(0) = -4 < 0$, а $f(2) = e^2 + e^{-2} > 6$, то существует значение $x_0 \in (0; 2)$, при котором $f(x_0) = 0$, т.е. x_0 – корень уравнения. Следовательно, пара $(x_0, \sqrt{4 - x_0^2})$ является решениями системы уравнений, т.е. решение системы не единственно.

Пусть $a = 0$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} e^x + e^{-x} + x^2 = y, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \le 2$ и $|y| \le 2$. Левая часть первого уравнения системы $e^x + e^{-x} + x^2 \ge 2$, а правая часть $y \le 2$. Равенство возможно лишь в случае $e^x + e^{-x} + x^2 = 2$ и $y = 2$, т.е. при $x = 0$ и $y = 2$. Получаем, что исходная система уравнений при $a = 0$ имеет единственное решение. ***Ответ.*** $a = 0$.

Пример 4. *Найти все значения параметров* a *и* b*, при которых имеет единственное решение система* $\begin{cases} \left| \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b,\ x > 0. \end{cases}$

Решение. Убедимся в том, что если число y_0 является решением системы, то и число $-y_0$ также решение. Подставим $-y_0$ в уравнения системы. Так $\left| \dfrac{x^{-y_0} - 1}{x^{-y_0} + 1} \right| = \left| \dfrac{1/x^{y_0} - 1}{1/x^{y_0} + 1} \right| = \left| \dfrac{x^{y_0}(1 - x^{y_0})}{x^{y_0}(1 + x^{y_0})} \right| = \left| \dfrac{x^{y_0} - 1}{x^{y_0} + 1} \right|$ и $x^2 + y_0^2 = x^2 + (-y_0)^2 = b$. Следовательно, необходимым условием единственности решения является $y_0 = -y_0 = 0$. Подставляя значение $y = 0$ в систему, получаем $\begin{cases} a = 0, \\ x^2 = b,\ x > 0. \end{cases}$.

Следовательно, $a = 0$ – допустимое значение a, удовлетворяющее условию задачи. При $a = 0$ первое уравнение системы примет вид $x^y = 1$. Возможны два варианта $x = 1,\ y -$ любое или $y = 0,\ x > 0$.

В первом случае второе уравнение системы примет вид $y^2 = b - 1$, т.е. при $b > 1$ имеется два решения $y = -\sqrt{b-1}$ и $y = \sqrt{b-1}$; если $b = 1$ – одно решение и при $b < 1$ нет решений.

Во втором – второе уравнение системы примет вид $x^2 = b$. Так как $x > 0$, то решение $x = \sqrt{b}$ имеется при $b > 0$.

Следовательно, единственное решение имеется при $0 < b \le 1$.

Ответ. $a = 0,\ 0 < b \le 1.$

Пример 5. *Найти все значения* a*, при которых имеет единственное решение система неравенств:* $\begin{cases} y \ge (x+y)^2 - x - 2y + a, \\ x \ge (y-x)^2 - 3y + 2x + a. \end{cases}$

Решение. Раскрывая скобки после возведения в квадрат и приводя подобные члены, получим: $\begin{cases} x^2 + x(2y-1) + y^2 - 3y + a \le 0, \\ x^2 - x(2y-1) + y^2 - 3y + a \le 0. \end{cases}$

Очевидно, что $x=0$ – необходимое условие единственности решения системы. После подстановки $x=0$ получаем $y^2-3y+a\le 0$, которое имеет единственное решение, если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, т.е. если $9-4a=0$ или $a=9/4$.

Проверка показывает, что исходная система неравенств при $a=9/4$ имеет единственное решение $(0;1,5)$.

Действительно, сложив левые части неравенств системы

$$\begin{cases} x^2+x(2y-1)+y^2-3y+9/4\le 0, \\ x^2-x(2y-1)+y^2-3y+9/4\le 0, \end{cases}$$

получим $x^2+2(y^2-3y+9/4)\le 0$ или $x^2+2(y-3/2)^2\le 0$. Из последнего неравенства следует $x=0$ и $y=3/2$.

Ответ. $a=9/4$.

Пример 6. *Найти все значения параметра* a *, при которых имеет два решения система уравнений:* $\begin{cases} (x-y)^2=6a-14, \\ x^2+y^2=3(2+a). \end{cases}$

Решение. Заметим, что если пара чисел (x_0,y_0) является решением данной системы уравнений, то пары (y_0,x_0), $(-x_0,-y_0)$ и $(-y_0,-x_0)$ – также решения. Следовательно, необходимым условием существования двух решений будет совпадение каких-либо из полученных пар. Рассмотрим случаи:

1. Если $(x_0,y_0)=(y_0,x_0)$, то $x_0=y_0$ или $x=y$.

Тогда система имеет вид $\begin{cases} 0=6a-14, \\ 2x^2=3(2+a). \end{cases}$

Из уравнения $6a-14=0$ следует $a=7/3$.

2. Если $(x_0,y_0)=(-x_0,-y_0)$, то $x_0=y_0=0$. Однако ни при каких значениях a система не может иметь решения $x=y=0$.

3. Если $(x_0,y_0)=(-y_0,-x_0)$, то $x_0=-y_0$ или $x=-y$. Тогда система имеет вид $\begin{cases} 4x^2=6a-14, \\ 2x^2=3(2+a). \end{cases}$ Полученная система не имеет решения.

Соответственно, возможны еще варианты: $(x_0, y_0) = (-x_0, -y_0)$ (аналогичен случаю 2); $(y_0, x_0) = (-y_0, -x_0)$ (аналогичен случаю 2); $(-x_0, -y_0) = (-y_0, -x_0)$ (аналогичен случаю 1).

Следовательно, три последних варианта не дают новых значений параметра a.

Проверим, что условие $a = 7/3$ является достаточным. При $a = 7/3$ система принимает вид $\begin{cases} (x-y)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$ Полученная система имеет два решения: $(-\sqrt{6{,}5}; -\sqrt{6{,}5})$ и $(\sqrt{6{,}5}; \sqrt{6{,}5})$, что и требуется по условию задачи.

Ответ. $a = 7/3$.

Задачи для самостоятельного решения

5.4.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-5)^2 - 7|x^2-5| + a = 0$$

имеет ровно 7 действительных корней, и найдите эти корни.

5.4.2. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение уравнение:

а) $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$; б) $2x^2 - a\operatorname{tg}(\cos x) + a^2 = 0$.

5.4.3. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$

5.4.4. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

5.4.5. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} y \geq (x-a)^2, \\ x \geq (y-a)^2. \end{cases}$$

5.4.6. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение система неравенств $\begin{cases} 2|x| - y^2 \geq 3a - 3, \\ |y| + 3x^2 \leq a^2 - a. \end{cases}$

5.4.7. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений: а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14. \end{cases}$ имеет ровно два решения;

б) $\begin{cases} \left(3 \cdot \sqrt{x|x|} + |y| - 3\right)\left(|x| + 3|y| - 9\right) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ имеет ровно три решения.

5.4.8. Найдите значение выражения $a^2 - bc$, если известно, что имеет нечетное число решений система уравнений:

$$\begin{cases} (x+y-z)^2 + |x+y| = a+b+c, \\ |z| - (x+y)^2 = (a+b)^2 - c, \\ |y-z| + |z-x| = a + 2b + 3c. \end{cases}$$

5.4.9. Определите все значения параметра a, при которых имеет ровно четыре решения система уравнений $\begin{cases} |x| + 4|y| = a, \\ |y| + x^2 = 1. \end{cases}$

5.4.10. Найдите все значения параметра a, при которых существует число r такое, что имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} 3|x| + |y| = 3, \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Ответы и указания

Ответы и указания к задачам главы I

1.1.1.а) (1) Уравнение квадратное при $a \notin \{0;2\}$; (2) неполное квадратное при $a = 2{,}5$ и $a = -\sqrt[3]{3}$; (3) линейное при $a = 0$ и $a = 2$; **б)** (1) уравнение квадратное при $a \notin \{0;1\}$; (2) неполное квадратное при $a = -2$; (3) линейное при $a = 0$ и $a = 1$. **1.1.2.а)** $a \in (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$; **б)** $a \in (-\infty;-3) \cup (-3;2) \cup (2;+\infty)$; **в)** $a \in \{0\} \cup (2;+\infty)$; **г)** $a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$. **1.1.3.а)** $a = 1{,}5$; **б)** $a = 0$ и $a = 2$; **в)** $a = -2$ и $a = 2$; **г)** $a = -2$ и $a = 2$; **д)** $a = 0{,}5$ и $a = -2$; **е)** $a \in \left\{3; \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}; \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. **1.1.5. а)** Если $a < -2$, то $x \le 2$; если $a = -2$, то $x \in \mathbb{R}$; если $-2 < a < 2$, то $x \ge 2$; если $a = 2$, то решений нет; если $2 < a < 3$, то $x \ge 2$; если $a = 3$, то решений нет; если $a > 3$, то $x \ge 2$; **б)** если $a \le -5/4$, то $x \in \mathbb{R}$; если $-4/5 < a < 1$, то $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2;+\infty)$; если $a = 1$, то $x \le -7/6$; если $a > 1$, то $x \in [x_1; x_2]$, где $x_1 = \dfrac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1}$ и $x_2 = \dfrac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1}$; **в)** если $a = -3$, то $x = -6$; если $a = -2$, то $x = -5$; если $a = 0$, то корней нет; если $a = 2$, то $x = 3$; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a \notin \{-3;-2;0;1;2\}$, то $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 3$. **1.1.6. а)** Если $a \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$, то $a^2 - 4a > 2a - 5$; если $a = 1$ или $a = 5$, то $a^2 - 4a = 2a - 5$; если $a \in (1;5)$, то $a^2 - 4a < 2a - 5$; **б)** если $a < -2$, то $-a^2 < a < -2$; если $a = -2$, то $-a^2 < a$; если $a \in (-2;-\sqrt{2})$, то $-a^2 < -2 < a$; если $a = -\sqrt{2}$, то $-2 = -a^2$ и $-a^2 < a$; если $a \in (-\sqrt{2};-1)$, то $-2 < -a^2 < a$; если $a = -1$, то $-2 < a$ и $a = -a^2 = -1$; если $a \in (-1;0)$, то $-2 < a < -a^2$; если $a = 0$, то $-2 < a$ и $a = -a^2 = 0$; если $a \in (0;\sqrt{2})$, то $-2 < -a^2 < a$; если $a = \sqrt{2}$, то $-a^2 < a$ и $-a^2 = -2$; если $a > \sqrt{2}$, то $-a^2 < -2 < a$; **в)** если $a < -2$, то $1 - a^2 < a - 1 < -2a - 7$; если $a = -2$, то все числа равны -3; если

$a \in (-2;1)$, то $-2a-7 < a-1 < 1-a^2$; если $a=1$, то $-2a-7 < a-1$ и $1-a^2 = a-1 = 0$; если $a \in (1;4)$, то $-2a-7 < 1-a^2 < a-1$; если $a=4$, то $1-a^2 = -2a-7 = -15$ и $1-a^2 < a-1$; если $a>4$, то $1-a^2 < -2a-7 < a-1$. **1.1.7. а)** Если $a \le -2$, то $1-a^2$; если $-2 < a < 4$, то $-2a-7$; если $a \ge 4$, то $1-a^2$; **б)** если $a \le 0,5$, то $a-1$; если $a > 0,5$, то $-(a+1)/3$. **1.1.8. а)** Если $a \le 0$, то $x \in [3a;2a] \cup (a+2;+\infty)$; если $0 < a < 1$, то $x \in [2a;3a] \cup (a+2;+\infty)$; если $1 \le a \le 2$, то $x \in [2a;+\infty)$; если $a > 2$, то $x \in (a+2;+\infty)$; **б)** если $a \le -2$, то $x \in [-a^2;a] \cup [-2;+\infty)$; если $-2 < a \le -\sqrt{2}$, то $x \in [-a^2;-2] \cup [a;+\infty)$; если $-\sqrt{2} < a \le -1$, то $x \in [a;+\infty)$; если $-1 < a \le 0$, то $x \in [-a^2;+\infty)$; если $0 < a < \sqrt{2}$, то $x \in [a;+\infty)$; если $a \ge \sqrt{2}$, то $x \in [-a^2;-2] \cup [a;+\infty)$.

1.2.1. а) Если $a=3,$ то решений нет; если $a \ne 3,$ то $x = 1/(a-3);$ **б)** если $a=-2$, то нет решений; если $a=2$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \ne -2$ и $a \ne 2,$ то $x = -1/(a+2);$ **в)** если $a=-2$, то нет решений; если $a = 0,5,$ то $x \in \mathbb{R}$; если $a \notin \{0,5;-2\}$, то $x = \dfrac{a^2}{a+2}$; **г)** если $a=-3$ или $a=3$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \notin \{-3;3\}$, то $x=a$. **1.2.2. а)** При $a=0$ и $a=-1$ решений нет; если $a=2$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \notin \{-1;0;2\}$, то $x = \dfrac{1}{a^3+a^2}$; **б)** при $a=0$ и $a=3$ решений нет; если $a=-3$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \notin \{-3;0;3\}$, то $x = \dfrac{a^2-3a+9}{a^2-3a}$. **1.2.3. а)** Если $a=3$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a=0$, то решений нет; если $a \notin \{0;3\}$, то $x = -1/a$; **б)** если $a=1$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a=0$, то нет решений; если $a \ne 0$ и $a \ne 1$, то $x = -3/a$. **1.2.4. а)** Если $a=1$, то $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$; если $a=-1$, то решений нет; если $a \notin \{-1;1\}$, то $x = \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$; **б)** если $a=-2$, то $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$; если $a=2$, то нет решений; если

$a\ne -2$ и $a\ne 2$, то $x=-2$. **1.2.5. а)** При $a\in\{-4,-2,0\}$ решений нет; если $a=2$, то $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;3)\cup(3;+\infty)$; если $a\notin\{-4;-2;2;0\}$, то $x=-\dfrac{7a+8}{a+4}$; **б)** при $a\in\left\{0;1;2;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ решений нет; $x=\dfrac{2a^2-2a}{a^2-a-1}$ при других значениях a; **в)** если $a\notin\{0;2\}$ и $b\ne 3a$, то $x=\dfrac{a(6-b)}{a-2}$; если $a=2$ и $b=6$, то $x\in(-\infty;-6)\cup(-6;+\infty)$; решений нет при $a=2$ и $b\ne 6$; $a=0$ и любом b; $3a=b$ и $a\ne 2$. **1.2.6. а)** $a=6$; **б)** $a=0$ и $a=5$. **1.2.7. а)** Если $a\ne b$ и $a\ne -b$, то $x=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$; **б)** если $a\ne b$, то $x_1=2a-b$ и $x_2=2b-a$; если $a=2b$, то $x=3b$; если $a=b$, то $x=a$. **1.2.8. а)** Если $a<2$, то $x<\dfrac{a+1}{a-2}$; при $a=2$ решений нет; если $a>2$, то $x>\dfrac{a+1}{a-2}$; **б)** если $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, то $x<\dfrac{1}{a^2-9}$; если $a=-3$ или $a=3$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(-3;3)$, то $x>\dfrac{1}{a^2-9}$; **в)** при $a\in\{-4;-2\}$ решений нет; если $a=2$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(-2;2)$, то $x\ge\dfrac{1}{(a+4)(a+2)}$; если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, то $x\le\dfrac{1}{(a+4)(a+2)}$. **1.2.9. а)** если $a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, то $x\ge -1/a$; если $a=0$, то решений нет; если $a=2$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(0;2)$, то $x\le -1/a$; **б)** если $a=-3$ или $a=3$, то решений нет; если $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, то $x<a$; если $a\in(-3;3)$, то $x>a$. **1.2.10. а)** Если $a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, то $x\ge -1/a$; если $a=0$, то решений нет; если $a=1$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(0;1)$, то $x\le -1/a$; **б)** если $a<0$, то $x<2$; если $a=0$, то решений нет; если $0<a<2/3$, то $x>2$; если $a=2/3$, то решений нет;

если $a > 2/3$, то $x < 2$; **в)** если $a < 1{,}5$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a^2 - 12a - 2}{2a - 3}\right]$;
если $a = 1{,}5$, $x \in \mathbb{R}$; если $a > 1{,}5$, то $x \in \left[\frac{a^2 - 12a - 2}{2a - 3}; +\infty\right)$.

1.3.1. а) $m = 2$; **б)** $m = 2$. **1.3.2. а)** $a = 3$; **б)** $a = -7$. **1.3.3. а)** $a = -6$; **б)** $a = 4$. **1.3.4. а)** Если $a = -1$ или $a = 1$, то решений нет; если $a = 0$, бесконечно много решений вида $(c; -2)$, где $c \in \mathbb{R}$; если $a \notin \{-1; 0; 1\}$, то единственное решение $\left(\frac{3a^2 - 6}{2a^2 - 2}; \frac{-2a^4 - a^3 + 2a + 4}{2a^2 - 2}\right)$;
б) если $b = -5$ или $b = 0$, то решений нет; при $b \notin \{-5; 0\}$ единственное решение $\left(\frac{4b + 8}{b + 5}; \frac{-b^2 + b + 6}{b^2 + 5b}\right)$. **1.3.5. а)** $-\frac{3\sqrt{2} + 4}{8} \le a \le \frac{3\sqrt{2} - 4}{8}$;
б) $a \in (-\infty; -8] \cup \{0\} \cup [4; +\infty)$. **1.3.6. а)** $-1/4 \le a \le 1/3$; **б)** $a \ge -1/8$.
1.3.7. а) $1/8 < a \le 2/9$; **б)** $-1/8 \le a < 0$. **1.3.8. а)** $a \in [-7{,}2; 9]$. ***Указание.*** Воспользуйтесь методом графической интерпретации или используйте параметрическую форму задания прямой AB и найдите значения параметра a, при которых координаты точек отрезка AB удовлетворяют данной системе неравенств; **б)** $a \in [-6; 8]$.

Ответы и указания к задачам главы II

2.1.1. а) Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x_1 = 0$; если $a > 0$, то $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$; **б)** если $-1 < a < 4$, то решений нет; если $a = -1$ и $a = 4$, то $x_1 = x_2 = 0$; если $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, то $x_1 = -\sqrt{a^2 - 3a - 4}$ и $x_2 = \sqrt{a^2 - 3a - 4}$; **в)** если $a \le 0$, то решений нет, если $a > 0$, то $x_1 = -2/\sqrt{a}$ и $x_2 = 2/\sqrt{a}$; **г)** если $-1 \le a \le 4$, то решений нет; если $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, то $x_{1,2} = \pm 2/\sqrt{a^2 - 3a - 4}$; **д)** если $a < 0$, то решений нет, если $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$, если $a > 0$, то $x_1 = -\sqrt{a}$ и $x_2 = \sqrt{a}$; **е)** если $-1 < a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $0 < a < 4$, то решений нет; если $a \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$, то

$x_1 = -\sqrt{a^2-3a-4}$ и $x_2 = \sqrt{a^2-3a-4}$; **ж)** если $a \le -1$, то решений нет; если $a=4$, то $x \in \mathbb{R}$, если $a \in (-1;4)\cup(4;+\infty)$, то $x_1 = -1/\sqrt{a+1}$ и $x_2 = 1/\sqrt{a+1}$; **з)** если $a \notin \{-1;4\}$, то решений нет; если $a=-1$ и $a=4$, то $x \in \mathbb{R}$. **2.1.2. а)** Если $a=5$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a=1$, то $x_1=0$; если $a\in(-\infty;1)\cup(1;5)\cup(5;+\infty)$, то $x_1=0$ и $x_2=1/(a-1)$; **б)** если $a=4$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in\{-1;0\}$, то $x_1=0$; если $a\notin\{-1;0;4\}$, то $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{a^2+4a}{a+1}$. **2.1.3. а)** Если $0<a<4$, то решений нет; если $a=0$; $x_1=-1$; если $a=4$, то $x_1=3$; если $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, то $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a^2-4a}$; **б)** если $2<a<18$, то решений нет; если $a=2$, то $x_1=0$; если $a=18$, то $x_1=8$; если $a\in(-\infty;2)\cup(18;+\infty)$, то $x_{1,2}=(a-2\pm\sqrt{a^2-20a+36})/2$. **2.1.4. а)** При всех $a\in\mathbb{R}$ $x_1=2$ и $x_2=2a$; **б)** если $a<-0,5$, то решений нет; если $a=-0,5$, то $x_1=0,25$; если $a>-0,5$, то $x_{1,2}=(-a-1\pm\sqrt{2a+1})/2$. **2.1.5. а)** Если $a=1$, то $x_1=x_2=-1$; если $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$, то $x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1-a})/a$; если $a=0$, то $x=-0,5$; если $a>1$, то решений нет; **б)** если $a<1/5$, то решений нет; если $a=1$, то $x_1=1/4$; если $a=1/5$, то $x_{1,2}=1,5$; если $a>1/5$, то $x_{1,2}=\dfrac{-(a+1)\pm\sqrt{5a-1}}{a-1}$; **в)** если $a=-1$, то $x=-1$; если $a=-1/3$, то $x=-1$; если $a\notin\{-1;-1/3\}$, то $x_1=-1$ и $x_2=2a/(a+1)$; **г)** если $a\in\left(-1;\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};+\infty\right)$, то решений нет; если $a=-1$, то $x=0$; если $a=(1-\sqrt{17})/8$, то $x=(1-\sqrt{17})/4$; если $a=0$, то $x=0$; если $a=(1+\sqrt{17})/8$, то $x=(1+\sqrt{17})/4$; если $a\in(-\infty;-1)\cup\left((1-\sqrt{17})/8;0\right)\cup\left(0;(1+\sqrt{17})/8\right)$, то $x_{1,2}=\dfrac{a+1\pm\sqrt{1+2a-3a^2-4a^3}}{2a}$. **2.1.7. а)** Одно решение, если $a=-\sqrt{3}$ или $a=\sqrt{3}$; два решения, если $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$; нет решений, если $a\in(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; **б)** одно решение, если $a=1/3$ или $a=0$; два решения, если $a\in(-\infty;0)\cup(0;1/3)$; нет решений, если $a>1/3$; **в)** одно решение, если $a=1$; два решения, если $a\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; **г)** одно решение, если $a=-1{,}84$; два решения, если $a\in(-\infty;-2)\cup(-1{,}84;+\infty)$; нет решений, если $a\in[-2;-1{,}84)$. **2.1.8. а)** Если $a<0$, то $x_1=-\sqrt{-5a^3}$ и $x_2=\sqrt{-5a^3}$; если $a=0$, то $x=0$; если $a>0$, то $x_1=-\sqrt{a^3}$ и $x_2=\sqrt{a^3}$; **б)** если $a<0$, то $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2}$; если $a=0$, то $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=0$, если $a>0$, то $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2a},\ x_4=\sqrt{2a}$.

2.2.1. а) $a>0, b<0, c<0$; **б)** $a<0, b>0, c>0$; **в)** $a>0, b>0, c<0$; **г)** $a<0, b<0, c>0$. **2.2.2. а)** $p=-2, q=-1$; **б)** $p=4, q=-3$. **2.2.3. а)** $a=3,\ b=6, c=-4;$ **б)** $a=-4, b=8, c=1$. **2.2.4.** ***Указание:*** **а)** $a=10$; **б)** $a=-2$. **2.2.5. а)** $a=2,\ b=0,\ c=1$; **б)** $a=-3,\ b=-2,\ c=10$. **2.2.6. а)** $a<0$; **б)** $a<0$. **2.2.7. а)** $c<0{,}8;$ **б)** $c=0{,}8;$ **в)** $c>0{,}8;$ **г)** $c=-12;$ $c=-1185$. **2.2.8. а)** $b\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty);$ **б)** $b=-4$ или $b=4$; **в)** $b\in\left(-4;4\right)$. **2.2.9.** При $c>3{,}125$ графики не пересекаются; при $c=3{,}125$ графики имеют одну общую точку; при $c<3{,}125$ – две общие точки. **2.2.10. а)** При $a<-1$ графики не пересекаются; при $a=-1$ и $a=0$ графики имеют одну общую точку; при $a>-1,$ где $a\neq 0$ – две общие точки; **б)** при $2<a<10$ графики не имеют общих точек; при $a=1,\ a=2$ и $a=10$ – одна общая точка; при $a\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;2\right)\cup\left(10;+\infty\right)$ – две общие точки. **2.2.11.** При $b=4$ и $b=2{,}5$ графики имеют одну общую точку, при $b\in(-\infty;2{,}5)\cup(2{,}5;4)\cup(4;+\infty)$ – две общие точки. **2.2.12. а)** $a>9/8;$ **б)** $a=9/8;$ **в)** $a<9/8;$ **г)** $0<a<9/8;$ **д)** $a<0.$ **2.2.13. а)**

$a<-4/3$; **б)** $a=-4/3$; **в)** $a>-4/3$; **г)** $-4/3<a<0$; **д)** $a>0$. **2.2.14. а)** $a>1/8$; **б)** $a<-9$. **2.2.15. а)** При $-1<a<3$ уравнение не имеет решений; при $a=-1$ и $a=3$ – одно решение; при $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ – два решения; **б)** при $-1<a<6$ уравнение имеет два решения; при $a=-1$ и $a=6$ – одно решение; при $a\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$ – нет решений. **2.2.16. а)** $a<0$, $c<0$; **б)** $a>0$, $c>0$.

2.3.1. а) $a>0,25$; **б)** $a=0,25$; **в)** $a<0,25$; **г)** $a<-6$ и $a>0,25$; **д)** $a\in[0;0,25)$; **е)** $a\in[-6;0,25]$; **ж)** $a\in[-6;0)\cup\{0,25\}$; **з)** $a>-6$. **2.3.2. а)** $a>4/3$; **б)** $a=4/3$; **в)** $a<4/3$; **г)** $(-\infty;-5/3)\cup(4/3;+\infty)$; **д)** $a\in(0;4/3)$; **е)** $a\in[-5/3;4/3]$; **ж)** $a\in[-5/3;0]\cup\{4/3\}$; **з)** $a\geq 0$. **2.3.3. а)** $-5<a\leq -1$; **б)** $a<-5$. **2.3.4. а)** $p\leq -2\sqrt{10}$; **б)** $p<\dfrac{4(\sqrt{10}-1)}{9}$; **в)** таких p нет; **г)** $-4-2\sqrt{2}<p<-4+2\sqrt{2}$. **2.3.5.** $p=2$, $3,75<p\leq 6$. ***Указание.*** $f(1)=1$. **2.3.6. а)** Два корня при $-6\leq a<0,25$; один корень при $-12\leq a<-6$ и $a=0,25$; **б)** два корня при $-0,75<a<0,75$; один корень при всех остальных a; **в)** два корня при $-\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{-37+2\sqrt{71}}{31}$; один корень при $-\dfrac{13}{14}<a\leq -\dfrac{3}{4}$ и $a=\dfrac{-37+2\sqrt{71}}{31}$. **2.3.7.** $p\geq 0,8$.**2.4.1. а)** $a=3$; **б)** $a=1$. **2.4.2.** $a=2$, $a=3$. **2.4.3. а)** $\dfrac{a^2+6b}{9}$; **б)** $\dfrac{a^3+9ab}{27}$; **в)** $\dfrac{a^4+12a^2b+18b^2}{81}$. **2.4.4. а)** $-\dfrac{b}{a^2}$; **б)** $\dfrac{a^2(b^2-4a^2)}{8}$; **в)** $\dfrac{-b^3+6a^2b}{2a^4}$. **2.4.5. а)** Оба корня положительны при $a<0$; корни отрицательны при $a>0$; $x_1=x_2=0$ при $a=0$. ***Указание.*** $D=a^2/4$, если x_1 и x_2 – корни уравнения, то $x_1x_2=\dfrac{3a^2}{16}$, а $x_1+x_2=-a$; **б)** оба корня положительны при

$1-\sqrt{2} \le b < 0$; корни отрицательны при $0 < b \le 1+\sqrt{2}$; при $b=0$ уравнение не является квадратным. ***Указание.*** $D=-4(b^2-2b-1)$, если x_1 и x_2 – корни уравнения, то $x_1x_2=2$, а $x_1+x_2=\dfrac{-2(b+1)}{b}$; **в)** корни положительны при $m \le -5-4\sqrt{3}$; корни отрицательны при $m \in [-5+4\sqrt{3};2) \cup (3;+\infty)$; корни разных знаков при $2<m<3$. **2.4.6.** **а)** Корни разных знаков при $a<-0,5$; оба корня положительны при $a \ge 4$; оба корня отрицательны при $-0,5<a\le 0$; один корень равен нулю, а другой отрицательный при $a=-0,5$; корней нет при $0<a<4$; **б)** оба корня положительны при $a \in (-\infty;0) \cup (1;4/3]$; корни разных знаков при $0<a<1$; один корень равен нулю, а другой положительный при $a=1$; корней нет при $a>4/3$; **в)** оба корня положительны при $a \in (-\infty;-2] \cup [0,5;6/7) \cup$ $\cup (3;+\infty)$; корни разных знаков при $6/7<a<3$; один корень равен нулю, а другой положителен при $a=6/7$; корней нет при $-2<a<0,5$; **г)** оба корня отрицательны при $1 \le a < 1,5$; один корень равен нулю, а другой отрицательный при $a=1,5$; корни разных знаков при $1,5<a<2$; оба корня положительны при $2<a\le 6$; корней нет при $a \in (-\infty;1) \cup (6;+\infty)$. **2.4.7.** 14. **2.4.8.** $4x^2-7x+2=0$. **2.4.9.** $3x^2-13=0$. **2.4.10.** $a^2x^2-(b^2-2ac)x+$ $+c^2=0$ **2.4.11.** $[3;3,6]$. **2.4.12.** **а)** $-0,5$ и $0,5$; **б)** -3 и 5; **в)** $0,5$ и 1. **2.4.13.** 1. **2.4.14.** $a=-3,\ \ S=18$. **2.4.15.** **а)** 16; **б)** 24. **2.4.16.** **а)** $(0;0,5) \cup \{1\}$; **б)** $\left(0;5/3\right) \cup \left\{2,5\right\}$.

2.5.1. **1)** $x \in [x_3;\ x_2)$; **2)** $x \in [x_2;\ x_4)$; **3)** $x \in (x_1;\ x_4]$; **4)** $x \in (x_1;x_3] \cup$ $\cup [x_4;x_2)$; **5)** $x \in (-\infty;x_1] \cup [x_2;+\infty)$; **6)** $x \in (-\infty;x_3) \cup (x_4;+\infty)$; **7)** $x \in (x_1;x_3]$; **8)** $x \in (-\infty;x_1] \cup (x_4;+\infty)$; **9)** $x \in (-\infty;x_3) \cup [x_2;+\infty)$. **10)** $x \in (-\infty;x_1) \cup [x_4;+\infty)$; **11)** $x \in [x_3;x_2)$; **12)** $x \in (-\infty;x_2) \cup [x_4;+\infty)$. **2.5.2.** **а)** Если $a \le 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a>0$, то $x \in (-\infty;-\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a};+\infty)$; **б)** если $a \le 0$, то решений нет; если $a>0$, то $x \in (-\sqrt{a};\sqrt{a})$; **в)** если $-1<a<4$, то решений нет; если $a=-1$ или

$a=4$, то $x=0$; если $a\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$, то $x\in[-\sqrt{a^2-3a-4};\sqrt{a^2-3a-4}]$; **г)** если $a\le 0$, то решений нет; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-2/\sqrt{a})\cup(2/\sqrt{a};+\infty)$; **д)** если $-1\le a\le 4$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$, то $x\in\left[-2/\sqrt{a^2-3a-4};2/\sqrt{a^2-3a-4}\right]$; **е)** если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-\sqrt{a}]\cup[\sqrt{a};+\infty)$; **ж)** если $a<-1$, то $x\in(-\infty;-\sqrt{a^2-3a-4}]\cup[\sqrt{a^2-3a-4};+\infty)$; если $-1\le a\le 0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $0<a<4$, то решений нет; если $a=4$, то $x=0$; если $a>4$, то $x\in[-\sqrt{a^2-3a-4};\sqrt{a^2-3a-4}]$; **з)** если $a\le -1$, то $x\in\mathbb{R}$; если $-1<a<4$, то $x\in(-1/\sqrt{a+1};1/\sqrt{a+1})$; если $a=4$, то решений нет; если $a>4$, то $x\in(-\infty;-1/\sqrt{a+1})\cup(1/\sqrt{a+1};+\infty)$; **и)** если $a\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$, то решений нет; если $-1<a<4$, то $x\in\mathbb{R}$. **2.5.3. а)** Если $a\le 1$, то $x\in(-\infty;2a)\cup(2;+\infty)$; если $a>1$, то $x\in(-\infty;2)\cup(2a;+\infty)$; **б)** если $a\le -0,5$, то решений нет; если $a>-0,5$, то $x\in\left(\dfrac{-a-1-\sqrt{2a+1}}{2};\dfrac{-a-1+\sqrt{2a+1}}{2}\right)$. **2.5.4. а)** Если $0\le a\le 4$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$, то $x\in(-\infty;a-1-\sqrt{a^2-4a}]\cup$ $\cup[a-1+\sqrt{a^2-4a};+\infty)$; **б)** если $2<a<18$, то решений нет; если $a=2$, то $x=0$; если $a=18$; то $x=8$, если $a\in(-\infty;2)\cup(18;+\infty)$, то $x\in\left[\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-20a+36}}{2};\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-20a+36}}{2}\right]$. **2.5.5. а)** Если $a<1$, то $x\in(-\infty;1/(a-1)]\cup[0;+\infty)$; если $a=1$, то $x\ge 0$; если $a=5$, то $x\in\mathbb{R}$; если $1<a<5$, то $x\in[0;1/(a-1)]$; если $a>5$, то $x\in(-\infty;0]\cup[1/(a-1);+\infty)$; **б)** если $a<-4$, то $x\in\left(\dfrac{a^2+4a}{a+1};0\right)$; если

$a=-4$, то решений нет; если $-4<a<-1$, то $x\in\left(0;\dfrac{a^2+4a}{a+1}\right)$; если $a=-1$, то $x>0$; если $-1<a<0$, то $x\in\left(-\infty;\dfrac{a^2+4a}{a+1}\right)\cup(0;+\infty)$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; если $0<a<4$, то $x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{a^2+4a}{a+1};+\infty\right)$; если $a=4$, то решений нет; если $a>4$, то $x\in\left(0;\dfrac{a^2+4a}{a+1}\right)$. **2.5.6. а)** Если $a<0$, то $x\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a};\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right]$; если $a=0$, то $x\geq-0{,}5$; если $0<a<1$, то $x\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{a}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{1-a}}{a};+\infty\right)$; если $a\geq1$, то $x\in\mathbb{R}$; **б)** если $a\leq1/5$, то $x\in\mathbb{R}$; если $1/5<a<1$, то $x\in\left(-\infty;\dfrac{-(a+1)+\sqrt{5a-1}}{a-1}\right]\cup\left[\dfrac{-(a+1)-\sqrt{5a-1}}{a-1};+\infty\right)$; если $a=1$, то $x\leq1/4$; если $a>1$, то $x\in\left[\dfrac{-(a+1)-\sqrt{5a-1}}{a-1};\dfrac{-(a+1)+\sqrt{5a-1}}{a-1}\right]$.
2.5.7. $m>1$. **2.5.8. а)** $a<-6$; **б)** $a>6$. **2.6.1. а)** 6 и 10; **б)** 2 и $-82/25$. **2.6.2.** $a\in\left(-(7+\sqrt{45})/2;-4+\sqrt{12}\right)$. **2.6.3. а)** $a\in(-\infty;-1]\cup[1/3;+\infty)$; **б)** $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **2.6.4. а)** $a\geq10/3$; **б)** $a\leq2/3$. **2.6.5. а)** $a\in[2;+\infty)$; **б)** $a\in(-0{,}5;0]$; **в)** $a\in\left[-2;-\dfrac{2}{\sqrt5}\right]\cup\left[\dfrac{2}{\sqrt5};2\right]$; **г)** $a\in[1;+\infty)$. **2.6.6. а)** $a_1=6$ и $a_2=-1{,}5$; **б)** $a=2$. **2.6.7.** $a\in(-\infty;-0{,}25]\cup\{0{,}25\}$. **2.6.8.** $[-14;-3)$. **2.6.9.** $a\leq0$. **2.6.10.** $0<a<1$. **2.6.11.** $a\in(-\sqrt[3]{36};-3)\cup(0;\sqrt[3]{9/8})$. ***Указание.*** $x=a^2/3$ –

абсцисса точки пересечения графиков левых частей уравнений. **2.6.12.** $a_{1,2}=\dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}$, $a_3=-\dfrac{1}{2}$, $a_4=1$. ***Указание.*** Выразить x из второго уравнения системы и подставить в первое.

Ответы и указания к задачам главы III

3.1.1. а) Если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то одно решение; если $a\in[-1;1]$, то решений нет; **б)** если $a<0$, то решений нет; если $a=0$ или $a>1$, то два; если $0<a<1$, то четыре; если $a=1$, то три; **в)** если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, то два решения; если $a=-2$ или $a=2$, то одно; если $-2<a<2$, то решений нет. **3.1.2. а)** Если $a=2$, то одно решение; если $a\neq 2$, то два; **б)** если $a\in(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$, то одно решение; если $a=-1$ или $a=1$, то два; если $-1<a<1$, то три; **в)** если $a<-1/8$, то решений нет; если $a=-1/8$ или $a>0$, то одно; если $-1/8<a\le 0$, то два. **3.1.3. а)** если $a<0$, то два решения; если $a\ge 0$, то решений нет; **б)** если $a=0$, то решений нет; если $a\in(-1-\sqrt{2};0)\cup(-1+\sqrt{2};+\infty)$, то одно решение; если $a=-1-\sqrt{2}$ или $a=-1+\sqrt{2}$, то два; если $a\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(0;-1+\sqrt{2})$, то три; **в)** если $a\in[-2;-1]\cup[0;1]$, то решений нет; если $a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$, то одно решение. **3.1.4. а)** Если $a\in(-\infty;0)\cup(\sqrt{2}/4;+\infty)$, то решений нет; если $a=0$ или $a=\sqrt{2}/4$, то одно; если $0<a<\sqrt{2}/4$, то два; **б)** если $a=1$, то два решения; если $a\neq 1$, то одно. ***Указание.*** Графиком функции $y=\sqrt{9-x^2}$ является полуокружность радиуса 3 с центром в точке $(0;0)$; **в)** если $a\ge -4/5$, то два решения; если $a<-4/5$, то решений нет. **3.1.5. а)** Если $a\in(-\infty;-5/3)\cup\{-4/3\}$, то два решения; если $a\in[-5/3;-4/3)$, то четыре решения; если $a>-4/3$, то нет решений; **б)** если $a\in(-\infty;0,5)\cup(1,5;+\infty)$, то два решения; если $a=0,5$ или $a=1,5$, то три решения; если $a\in(0,5;1,5)$, то четыре решения; **в)** если $a\in(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$, то одно решение; если $-1<a<0$, то два; если $a=0$, то бесконечно много. **3.1.6. а)** Если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то

$x=1$; если $a\in(-1;1)$, то $x=1$ или $x=\dfrac{7+a}{a-1}$; если $a=-1$, то $-3\le x\le 1$; если $a=1$, то $x\ge 1$; **б)** если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, то $x=3$; если $a\in(-2;2)$, то $x=-3$ или $x=-\dfrac{3a+10}{a+2}$; если $a=-2$, то $x\ge -3$; если $a=2$, то $-4\le x\le -3$. **3.1.7. а)** $a\le -0{,}5$. ***Указание.*** График функции $y=\sqrt{x-x^2}$ – полуокружность радиуса $0{,}5$ с центром в точке $(0{,}5;0)$, а функция $y=2xa+0{,}5-a$ задает семейство прямых, проходящих через точку $(0{,}5;0{,}5)$; **б)** $a\le -0{,}5$. **3.1.8.** Если $a<0$, то $a\le x\le 0$; если $a=0$, то решений нет; если $a>0$, то $0<x<a$. **3.1.9. а)** $-\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$; **б)** $a\in(-1;1)\cup\{-\sqrt{2}\}$; **в)** $a\in(1;\sqrt{2})$; **г)** $a\in[1;\sqrt{2}]$. **3.1.10. а)** $16/5<a<4$; **б)** $0<a<4$. **3.1.11.** $a\in(1-\sqrt{2};0)$. **3.1.12.** Наибольшее число решений равно пяти, если $a=-2$ или $a=2$. **3.1.13. а)** $a\in\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{16}{9}\right]\cup\left[0;\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$; **б)** $a\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **3.1.14. а)** $a\le 1$; **б)** $a\le -1$. **3.1.15.** $a_1=-1$, $a_2=4$. **3.1.16.** Если $a>2$, то решений нет; если $-2<a\le 2$, то $\dfrac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$; если $-17/4\le a\le -2$, то $\dfrac{1-\sqrt{17-4a}}{2}\le x\le\dfrac{-1-\sqrt{17+4a}}{2}$ и $\dfrac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{17-4a}}{2}$; если $a<-17/4$, то $\dfrac{1-\sqrt{17-4a}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$. **3.1.17.** $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответы и указания к задачам главы IV

4.1.1. а) $a=1$; **б)** $a=0{,}5$. **4.1.2. а)** $a=\dfrac{5+\sqrt{73}}{6}$; **б)** $a=-3$. **4.1.3. а)** $a>2/3$; **б)** $0{,}5<a<1$. **4.1.4. а)** $a\in[-\sqrt[3]{3};-1]\cup\{0\}\cup\{1\}$. ***Указание.*** Числа a и a^3 – корни уравнения $x^2-a(1+a^2)x+a^4=0$; **б)**

$a \ge \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$. ***Указание.*** Используя метод графической интерпретации, рассмотрите расположение корней квадратного трехчлена $f(x)=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1$ относительно отрезка $[-1;2]$ при условии, что его график пересекает ось Oy в точке с координатами $(0;1)$. **4.1.5. а)** $a<\dfrac{\pi^2+4\pi-4}{2}$; **б)** $a<2\pi^2-4\pi-2$. **4.1.6.** $a=-2$, $b=-7$.

4.2.1. а) Если $a=-3$, то $x=0$; если $a\ne -3$, то $x_1=0$ и $x_2=a$; **б)** если $a=0$, то $x=5$; если $a=-5$, то $x=0$; если $a\notin\{0;-5\}$, то $x_1=0$ и $x_2=5$; **в)** если $a=3$, то $x=2$; если $a=-2$, то $x=-3$; если $a\notin\{3;2\}$, то $x_1=2$ и $x_2=-3$; **г)** если $a=-3$, то $x=3$; если $a=3$, то $x=3$; если $a\notin\{-3;3\}$, то $x_1=-a$ и $x_2=a$. **4.2.2. а)** Если $a\notin\{-4;-1;0{,}5\}$, то $x_1=2a+3$ и $x_2=a-1$; если $a=-4$, то $x=-5$; $a=-1$, то $x=-2$; $a=0{,}5$, то $x=4$; **б)** если $a\notin\{-1/3;2/3\}$, то $x_1=a$ и $x_2=a-3$; если $a=-1/3$, то $x=-10/3$; $a=2/3$, то $x=2/3$. **4.2.3. а)** Если $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$, то $x_1=a$ и $x_2=-3$; если $a\in\{-2;2\}$, то $x=-3$; **б)** если $a\in(-\infty;-1{,}5)\cup(-1{,}5;4)\cup(4;+\infty)$, то $x_1=-8$ и $x_2=3$; если $a=-1{,}5$, то $x=-8$; если $a=4$, то $x=3$. **4.2.4. а)** Если $a=10$, то решений нет; если $a\ne 10$, то $x=\dfrac{3+16a}{20-2a}$; **б)** если $a\in\left\{3;-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, то решений нет; если $a\notin\left\{3;-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, то $x=\dfrac{1-6a}{3a-9}$; **в)** если $a\in\left\{-\dfrac{1}{2};-\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$ то решений нет; если $a\notin\left\{-\dfrac{1}{2};-\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$, то $x=\dfrac{3a+4}{2a+1}$. **4.2.5. а)** если $a=0$, то решений нет; если $a=-2$, то

$x=-6$; если $a\neq 0$ и $a\neq -2$, то $x_{1,2}=\dfrac{a(a+4\pm\sqrt{a^2+4a+20})}{2}$; **б)** если $a=0$ или $a=1$, то решений нет; если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x_1=a$, $x_2=1-a$. **4.2.6. а)** $-1<a<0,5$; **б)** $-2<a<0$. **4.2.7. а)** $\dfrac{(-1\pm\sqrt{13})}{2}\cdot a$, где $a\in\mathbb{R}$. ***Указание.*** Обозначьте $x^2+ax=y$; **б)** $-a$, $a\pm\sqrt{a^2+2}$, где $a\in\mathbb{R}$. ***Указание.*** Решите данное уравнение относительно a, а далее решите полученные уравнения относительно x; **в)** если $a<-3$, то решений нет; если $-3\le a<-1$, то $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3+a}$; если $a\ge -1$, то $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3+a}$ и $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{1+a}$.

4.3.1. а) Если $a\le 0,5$, то $x\in(-\infty;2a)\cup(1;+\infty)$; если $a>0,5$, то $x\in(-\infty;1)\cup(2a;+\infty)$; **б)** если $a<-1,5$, то $x\in(2a;-3)$; если $a=-1,5$, то решений нет; если $a>-1,5$, то $x\in(-3;2a)$; **в)** если $a<1$, то $x\in(-\infty;2a]\cup(2;+\infty)$; если $a=1$, то $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; если $a>1$, то $x\in(-\infty;2)\cup[2a;+\infty)$; **г)** если $a<-1$, то $x\in(-\infty;a/2)\cup[-1/2;+\infty)$; если $a=-1$, то $x\in(-\infty;-0,5)\cup$ $\cup(-0,5;+\infty)$; если $a>-1$, то $x\in(-\infty;-1/2]\cup(a/2;+\infty)$. **4.3.2. а)** Если $a<0$, то $x\in(1+a;1)$; если $a=0$, то решений нет; если $a>0$, то $x\in(1;1+a)$; **б)** если $a<0$, то $x\in(-\infty;-1)\cup[-1-a;+\infty)$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-1-a]\cup(-1;+\infty)$. **4.3.3. а)** Если $a<-3$, то $x\in(a;-3)\cup(1;+\infty)$; если $a=-3$, то $x\in(1;+\infty)$; если $-3<a<1$, то $x\in(-3;a)\cup(1;+\infty)$; если $a=1$, то $x\in(-3;1)\cup(1;+\infty)$; если $a>1$, то $x\in(-3;1)\cup(a;+\infty)$; **б)** если $a<-3$, то $x\in(-\infty;a)\cup(-3;2)$; если $a=-3$, то $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;2)$; если $-3<a<2$, то $x\in(-\infty;-3)\cup(a;2)$; если $a=2$, то $x\in(-\infty;-3)$; если $a>2$, то $x\in(-\infty;-3)\cup(2;a)$; **в)** если $a<-1$, то $x\in(-\infty;a)\cup(-1;1)$; если $a=-1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)$; если $-1<a<1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(a;1)$; если $a=1$, то $x\in(-\infty;-1)$; если $a>1$, то

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;a)$. **4.3.4. а)** Если $a<-3$, то $x\in(-\infty;a]\cup(-3;0]$; если $a=-3$, то $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0]$; если $-3<a<0$, то $x\in(-\infty;-3)\cup[a;0]$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;-3)$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-3)\cup[0;a]$; **б)** если $a<-5$, то $x\in[0;5]\cup(-a;+\infty)$; если $a=-5$, то $x\in[0;5)\cup(5;+\infty)$; если $-5<a<0$, то $x\in[0;-a)\cup[5;+\infty)$; если $a=0$, то $x\in[5;+\infty)$; если $a>0$, то $x\in(-a;0]\cup[5;+\infty)$; **в)** если $a<0$, то $x\in(-\infty;a]\cup(0;2]$; если $a=0$, то $x\in(0;2]$; если $0<a<2$, то $x\in(-\infty;0)\cup[a;2]$; если $a=2$, то $x\in(-\infty;0)\cup\{2\}$; если $a>2$, то $x\in(-\infty;0)\cup[2;a]$. **4.3.5. а)** Если $a<-3$, то $x\in(-\infty;a]\cup[-3;-a)$; если $a=-3$, то $x\in(-\infty;3)$; если $-3<a<0$, то $x\in(-\infty;-3]\cup[a;-a)$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;-3]$; если $0<a\le 3$, то $x\in(-\infty;-3]\cup(-a;a]$; если $a>3$, то $x\in(-\infty;-a)\cup[-3;a]$; **б)** если $a<-3$, то $x\in[2a;a]\cup(-3;+\infty)$; если $a=-3$, то $x\in[-6;-3)\cup(-3;+\infty)$; если $-3<a<-1{,}5$, то $x\in[2a;-3)\cup[a;+\infty)$; если $a=-1{,}5$, то $x\in[-1{,}5;+\infty)$; если $-1{,}5<a<0$, то $x\in(-3;2a]\cup[a;+\infty)$; если $a=0$, то $x\in(-3;+\infty)$; если $a>0$, то $x\in(-3;a]\cup[2a;+\infty)$; **в)** если $a<-1/4$, то $x\in(-\infty;4a]\cup[-1;-2a-1)$; если $a=-1/4$, то $x\in(-\infty;-2a-1)$; если $-1/4<a<-1/6$, то $x\in(-\infty;-1]\cup[4a;-2a-1)$; если $a=-1/6$, то $x\in(-\infty;-1]$; если $-1/6<a<0$, то $x\in(-\infty;-1]\cup(-2a-1;4a]$; если $a=0$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0]$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-2a-1)\cup[-1;4a]$. **4.3.6. а)** Если $a\le 0$, то $x\in(-\infty;2a)\cup(-a;+\infty)$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;-a)\cup(2a;+\infty)$; **б)** если $a<1/3$, то $x\in(-\infty;2a-1)\cup\left[\dfrac{a-1}{2};+\infty\right)$; если $a=1/3$, то $x\in(-\infty;-1/3)\cup(-1/3;+\infty)$; если $a>1/3$, то $x\in\left(-\infty;\dfrac{a-1}{2}\right]\cup$ $\cup\left(2a-1;+\infty\right)$. **4.3.7. а)** Если $a<-3$, то $x\in(-\infty;a]\cup[-3;-2)\cup$ $\cup(2;+\infty)$; если $a=-3$, то $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; если $-3<a<-2$, то $x\in(-\infty;-3]\cup[a;-2)\cup(2;+\infty)$; если $a=-2$, то $x\in(-\infty;-3]\cup$

$\cup(2;+\infty)$; если $-2<a<2$, то $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;a]\cup(2;+\infty)$; если $a=2$, то $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; если $a>2$, то $x\in(-\infty;-3]\cup(-2;2)\cup[a;+\infty)$; **б)** если $a\le -2{,}5$, то $x\in(-\infty;-8]\cup[3;5)\cup(-2a;+\infty)$; если $-2{,}5<a<-1{,}5$, то $x\in(-\infty;-8]\cup[3;-2a)\cup(5;+\infty)$; если $a=-1{,}5$, то $x\in(-\infty;-8]\cup(5;+\infty)$; если $-1{,}5<a<4$, то $x\in(-\infty;-8]\cup(-2a;3]\cup$ $\cup(5;+\infty)$; если $a=4$, то $x\in(-\infty;-8)\cup(-8;3]\cup(5;+\infty)$; если $a>4$, то $x\in(-\infty;-2a)\cup[-8;3]\cup(5;+\infty)$. **4.3.8. а)** $a\in(-\infty;-0{,}5)\cup[2/3;+\infty)$; **б)** $a\in[2/3;1)$. **4.3.9. а)** Если $a<10$, то $x\in\left(-\infty;\frac{4a}{5}\right)\cup\left(\frac{3+16a}{20-2a};+\infty\right)$; если $a=10$, то $x\in(-\infty;8)$; если $a>10$, то $x\in\left(\frac{3+16a}{20-2a};\frac{4a}{5}\right)$; **б)** если $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};3\right)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{2a}{3}\right)\cup\left(\frac{1-6a}{3a-9};+\infty\right)$; если $a\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{1-6a}{3a-9}\right)\cup\left(\frac{2a}{3};+\infty\right)$; если $a=3$, то $x\in(-\infty;2)$; если $a>3$, то $x\in\left(\frac{2a}{3};\frac{1-6a}{3a-9}\right)$; **в)** если $a\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty\right)$, то $x\in\left(\frac{2}{a};\frac{3a+4}{2a+1}\right]$; если $a\in\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$, то решений нет; если $a\in\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, то $x\in\left[\frac{3+16a}{20-2a};\frac{2}{a}\right)$; если $a=-0{,}5$, то $x\in(-\infty;-4)$; если $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$, то $x\in\left(-\infty;\frac{2}{a}\right)\cup\left[\frac{3a+4}{2a+1};+\infty\right)$; если $a=0$, то $x\in[4;+\infty)$. **4.3.10.** ***Указание.*** Разложите левую часть на множители. ***Ответ.*** **а)** Если $a\le-\sqrt{2}$, то решений нет; если

$-\sqrt{2} < a < 0$, то $(-2-\sqrt{4-a^4})/a < x < (-2+\sqrt{4-a^4})/a$; если $a=0$, то $x \in (0;+\infty)$; если $0 < a \le \sqrt{2}$, то $x \in \left(-\infty;(-2-\sqrt{4-a^4})/a\right) \cup \left((-2+\sqrt{4-a^4})/a;+\infty\right)$; если $a > \sqrt{2}$, то $x \in \mathbb{R}$; **б)** если $a \le -\sqrt[4]{1/12}$, то решений нет; если $-\sqrt[4]{1/12} < a < 0$, то $x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\dfrac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; если $a=0$, то $x \in (0;+\infty)$; если $0 < a \le \sqrt[4]{1/12}$, то $x \in \left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};+\infty\right)$; если $a > \sqrt[4]{1/12}$, то $x \in \mathbb{R}$.

4.4.1. а) $a \ge 5$; **б)** $-6 \le a \le 6$; **в)** $a \le -0,5$. **4.4.2. а)** $(-\infty;-6] \cup [4;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-0,5] \cup [0,5;+\infty)$. ***Указание.*** Пусть $f(x,a) = |x+a| - |x-a|$. Тогда $f(x,a) = \left[\begin{array}{l} -2a, \text{ если } x < -a, \\ 2x, \text{ если } -a \le x < a, \\ 2a, \text{ если } x \ge a \end{array}\right.$ при $a \ge 0$ и, если $a < 0$, то $f(x,a) = \left[\begin{array}{l} -2a, \text{ если } x < -a, \\ -2x, \text{ если } a \le x < -a, \\ 2a, \text{ если } x \ge -a. \end{array}\right.$ **4.4.3. а)** Если $a < 0$, то решений нет; если $a \ge 0$, то $-\sqrt[2002]{a} \le x \le \sqrt[2002]{a}$; **б)** если $a < 0,5$, то $x = -(a+1)/3$; если $a \ge 0,5$, то $x = a-1$; **в)** если $a < -1/4$, то $x = (-1-\sqrt{1-4a})/2$; если $a = -1/4$, то $x_1 = -0,5$, $x_2 = (-1-\sqrt{2})/2$; если $-1/4 < a < 0$, то $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1+4a})/2$, $x_3 = (-1-\sqrt{1-4a})/2$; если $a=0$, то $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$; если $a > 0$, то $x = (-1+\sqrt{1+4a})/2$; **г)** если $a \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$, то решений нет; если $a \in [-1;1]$, то $x_1 = 1-|a|$ и $x_2 = (|a|-1)/3$; **д)** если $a \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$, то $x = 1$; если $a = -1$, то

$-3 \le x \le 1$; если $-1 < a < 1$, то $x = (a+7)/(a-1)$; если $a = 1$, то $x \ge 1$; **е)** если $a \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = a-4$; если $-4 \le a < 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = a-4$ и $x_3 = -a-4$; если $a = 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = -4$; если $0 < a \le 4$, то $x = 0$. **4.4.4. а)** $a = 4$. ***Указание.*** Воспользуйтесь графическим методом; **б)** $a = 0$ или $a = 21/4$. **4.4.5. а)** $a \in (-\infty;-3] \cup \{-9/4\} \cup (-1;+\infty)$. ***Указание.*** Воспользуйтесь графическим методом; **б)** $a \in (-9/4;-1]$. **4.4.6. а)** Если $a < -1$, то $x_1 = a-1$, $x_2 = (a+1)/3$; если $-1 \le a \le 1$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = a-1$; если $a > 1$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = (a-1)/3$; **б)** если $a < -1$, то решений нет; если $-1 \le a \le -0{,}5$, то $x_1 = -a-1$, $x_2 = a+1$; если $-0{,}5 \le a \le 1$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = (a-1)/3$; если $a \ge 1$, то $x_1 = a+1$, $x_2 = a-1$; **в)** если $a \le 0$, то $x = -a$; если $a > 0$, то $x_1 = a$, $x_2 = -7a$; **г)** если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x \ge 0$; если $a > 0$, то $x = 2a$. **4.4.7. а)** $4/3 \le a \le 2$; **б)** $-0{,}3 \le a \le 0$. **4.4.8. а)** 0; $\pm 1/2$; $\pm 1/6$; $-1/20$; **б)** 0; $\pm 1/3$; $\pm 1/9$; $-1/30$. **4.4.9. а)** $a = 4/3$; **б)** $a = 4/7$.

4.5.1. а) Если $-2 \le a \le 2$, то решений нет; если $a \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$, то $-a^2 + 6 < x < a^2 - 2$; **б)** если $a \le 0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a};+\infty)$; **в)** если $a \le 4$, то $x \in (-\infty; a)$, если $a > 4$, то $x \in (-\infty; a)$; **г)** если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a-1) \cup (1-a;+\infty)$; если $a \ge 1$, то $x \in (-\infty; 1-a) \cup (a-1;+\infty)$. **4.5.2. а)** Если $a \le -3$, то $x \in [-4-2a;+\infty)$; если $a > -3$, то $x \in [(4-2a)/5;+\infty)$; **б)** если $a < -1/6$, то решений нет; если $a \ge -1/6$, то $x \in [-1-2a; a-0{,}5)$. **4.5.3. а)** Если $a < -0{,}4$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{3a-3}{7}\right] \cup [-a-1;+\infty)$; если $a \ge -0{,}4$, то $x \in \mathbb{R}$; **б)** если $a < 1/4$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{2a+1}{3}\right] \cup [1-2a;+\infty)$; если $a \ge 1/4$, то $x \in \mathbb{R}$. **4.5.4. а)** $-13/4 < a < 3$; **б)** $-1 < a < 5/4$. **4.5.5.** $-49/16 \le y - x \le 81/16$. **4.5.6.**

а) $16;-12$; **б)** $19;-5$. **4.5.7. а)** $a=-1$; **б)** $a=1$. **4.5.8. а)** Если $-2,5<a<2,5$, то $-2,5<x<2,5$; если $a\notin(-2,5;2,5)$,то решений нет; **б)** если $a\le-2,5$, то $x>-2,5$; если $-2,5<a<2,5$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\ge2,5$, то $x<2,5$; **в)** если $a\le-6/5$ или $a\ge6/5$, то решений нет; если $-6/5<a\le-3/5$, то $3-3a<x<1+a/3$; если $-3/5<a\le3/5$, то $-1+a/3<x<1+a/3$; если $3/5<a<6/5$, то $-1+a/3<x<3-3a$; **г)** при $b\le0$ решений нет; при $b>0$: если $a\le-2b/5$ или $a\ge2b/5$, то решений нет; если $-2b/5<a\le-b/5$, то $b-3a<x<(b+a)/3$; если $-b/5<a\le b/5$, то $(a-b)/3<x<(b+a)/3$; если $b/5<a<2b/5$, то $(a-b)/3<x<b-3a$. **4.5.9. а)** $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$. ***Указание.*** Пусть $b=a-2$, $b\ne0$, $t=\dfrac{x-2}{b}$. Тогда неравенство примет вид $f(t)=\dfrac{b^2|t+1|}{2}-|t|+\dfrac{b^2|t-1|}{2}\le1$. Далее освободитесь от модулей; **б)** $-3-\sqrt{3}$; $-3+\sqrt{3}$.

4.6.1. а) Если $a<1$, то решений нет; если $a\ge1$, то $x=\dfrac{1+(a-1)^2}{2}$; **б)** если $a>2$, то решений нет; если $a\ge2$, то $x=2-2a$. **4.6.2. а)** Если $a=-1$ или $a=1$, то $x\in[0;1]$; если $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;-\infty)$, то $x_1=0$ и $x_2=1$; **б)** если $a\in[-2;2]$, то решений нет; если $a\in(-\infty;-2)\cup(2;-\infty)$, то $x=a$. **4.6.3. а)** Если $a\ne-3$, то решений нет; если $a=-3$, то $x\ge-3$; **б)** если $a<-1,5$, то решений нет; если $a\ge-1,5$, то $x=a+3$; **в)** если $a<9/4$, то решений нет; если $a\ge9/4$, то $x=\sqrt{a}-3$. **4.6.4. а)** Если $a\le-3$, то $x_1=a$, $x_2=-3$ и $x_3=3$; если $-3\le a<3$, то $x_1=a$ и $x_2=3$; если $a>3$, то $x=a$; **б)** если $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, то $x_1=a$, $x_2=-3$ и $x_3=3$; если $-3\le a\le3$, то $x_1=3$ и $x_2=-3$. **4.6.5. а)** Если $a\in(-\infty;6)\cup\{49/8\}$, то одно решение; если $a\in[6;49/8)$, то – два; если $a>49/8$, то нет решений; **б)** если $a<-1/4$, то решений нет; если $a=-1/4$, то уравнение имеет один корень; если $-1/4 < a \le 0$, то – два корня; если $a > 0$, то – один; **в)** если $a \in (-\infty;-0) \cup (0,5;+\infty)$, то решений нет; если $0 \le a \le 0,5$, то уравнение имеет один корень; **г)** если $a \in (-\infty;-2) \cup (2\sqrt{2};+\infty)$, то решений нет; если $a \in [-2;2) \cup \{2\sqrt{2}\}$, то уравнение имеет один корень; если $a \in [2;2\sqrt{2})$, то – два корня. ***Указание.*** График функции $y = \sqrt{4-x^2}$ – полуокружность. **4.6.6. а)** Если $a > 1/8$, то решений нет; если $a \in (-\infty;0) \cup \{1/8\}$, то одно; если $a \in [0;1/8)$, то – два; **б)** если $a > -2\sqrt{2}$, то решений нет; если $a = -2\sqrt{2}$, то – одно; если $a < -2\sqrt{2}$, то – два; **в)** если $a = 1$, то два решения; если $a \ne 1$, то – одно; **г)** если $a \in (-\sqrt{7}/3;\sqrt{7}/3)$, то решений нет; если $a \in (-\infty;-4/3) \cup (4/3;+\infty) \cup \{-\sqrt{7}/3\} \cup \{\sqrt{7}/3\}$, то – одно; если $a \in [-4/3;-\sqrt{7}/3) \cup (\sqrt{7}/3;4/3]$, то – два. **4.6.7. а)** если $a \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, то $x = 5a/3$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. ***Указание.*** Сделайте замену $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}} = t$; **б)** если $a + b \ne 0$, то $x = \dfrac{a-b}{2}$; если $a + b = 0$, то решений нет. ***Указание.*** Воспользуйтесь тем, что если $f > 0$, то $f + \dfrac{1}{f} \ge 2$. Равенство возможно при $f = 1$. **4.6.8. а)** Если $a < -1/4$, то решений нет; если $a = -1/4$, то $x = 1/4$; если $-1/4 < a \le 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{2a+1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$; если $a > 0$, то $x = \dfrac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}$; **б)** если $a < -1/4$, то решений нет; если $-1/4 \le a \le 0$, то $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$; если $0 < a < 1$, то $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a \ge 1$, то $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$.

Указание. Пусть $\sqrt{x+a}=t$, где $t\ge 0$. Тогда получим систему $\begin{cases} t+a=x^2; \\ t^2-a=x; \end{cases}$ **в)** если $a\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$, то $x=\dfrac{a^2+1}{2a}$; при других a решений нет. **4.6.9.** **а)** Если $a\in(-\infty;-7)\cup(9;+\infty)$, то решений нет; если $a\in[-7;9]$, то $x=\dfrac{a^2-18a+49}{48}$; **б)** если $a<1$, то решений нет; если $a\ge 1$, то $x=\dfrac{a^2+2a-7}{4}$. **4.6.10.** **а)** Если $a\le 0$, то $x=-a$; если $a>0$, то $x=a$; **б)** если $a<0$, то $x=-a\sqrt{3}$; если $a\ge 0$, то $x=a\sqrt{3}$. **4.6.11.** **а)** Если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то решений нет; если $a=0$, то $x\ge 0$; если $a\in[-1;0)\cup(0;1]$, то $x=(1-a)^2/4$; **б)** если $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$, то решений нет; если $a=0$, то $x=0$; если $a\ge 1$, то $x=(\sqrt{4a-3}-1)/2$. ***Указание.*** См. решение примера 11 на стр. 113.

$$\sqrt{a-\sqrt{x+a}}=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1=a, \\ a-x^2\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x=a, \\ a-x^2\ge 0, \\ x\ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1=a, \\ x^2\le a, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x^2\le a, \\ x\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

4.6.12. **а)** Если $a\in(-\infty;2)$, то решений нет; если $a\ge 2$, то $x=\left(\dfrac{a^2+4}{2a}\right)^2+3$. ***Указание.*** Введите новые переменные $\sqrt{x-3}=u$ и $\sqrt{x-7}=v$, где $u\ge 0$ и $v\ge 0$. Далее решите систему уравнений $u+v=a$ и $u^2-v^2=4$; **б)** если $a<\sqrt{1,5}$, то решений нет; если $a\in[\sqrt{1,5};\sqrt{3}]$, то $x_{1,2}=3a^2-2\pm 2a\sqrt{2a^2-3}$; если $a>\sqrt{3}$, то

$x = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$; **в)** если $a < \sqrt{22/3}$, то решений нет; если $a \in [\sqrt{22/3}; \sqrt{11}]$, то $x_{1,2} = \dfrac{2a^2 - 7 \pm a\sqrt{3a^2 - 22}}{2}$; если $a > \sqrt{11}$, то $x = \dfrac{2a^2 - 7 + a\sqrt{3a^2 - 22}}{2}$. **4.6.13.а)** $a \in [-1/12; 0]$; **б)** $a \in [-1/20; 0]$.

4.7.1. а) Если $a \le 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $0 \le x < a^2$; **б)** если $a < 0$, то $x > 0$; если $a \ge 0$, то решений нет; **в)** если $a \le 0$, то $x \ge 0$; если $a > 0$, то $x \ge a$; **г)** если $a < 0$, то $x \ge 0$; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \ge a$. **4.7.2. а)** Если $a < -2$, то решений нет; если $a \ge -2$, то $x \ge a$; **б)** если $a < -1$, то $0 \le x \le \dfrac{1 - a - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2}$ и $x \ge (1 - a + \sqrt{a^2 - 2a - 3})/2$; если $a \ge -1$, то $x \ge 0$; **в)** если $a < 1$, то $x \le a - 1$ и $0 \le x \le 1$; если $1 \le a \le 2$, то $a - 1 \le x \le 1$ и $x \le 0$; если $a > 2$, то $x \le 0$; **г)** если $2a > b$, то решений нет; если $2a \le b$, то $x \in [b/2; b - a]$. **4.7.3. а)** Если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \ne 0$, то решений нет; **б)** если $a = 0$, то $x = 2$; если $a \ne 0$, то решений нет; **в)** если $a < -1$, то решений нет; если $a = -1$, то $x = -1$; если $-1 < a < 1$, то $x \in [-1; (a - \sqrt{2 - a^2})/2]$; если $a = 1$, то $x \in [-1; 0] \cup \{1\}$; если $1 < a < \sqrt{2}$, то $x \in [-1; (a - \sqrt{2 - a^2})/2] \cup [(a + \sqrt{2 - a^2})/2; 1]$; если $a = \sqrt{2}$, то $x \in (-\infty; 1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}; +\infty)$; если $a > \sqrt{2}$, то $-1 \le x \le 1$.
4.7.4. а) Если $a \le 0$, то $x \le (a - 2 - \sqrt{a^2 - 4a})/2$; если $0 < a < 4$, то решений нет; если $a \ge 4$, то $\dfrac{a - 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \le x \le \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$; **б)** если $a < -1$, то решений нет; если $-1 \le a \le 0$, то $1 - \sqrt{1 + a} \le x \le 1 + \sqrt{1 + a}$; если $a > 0$, то $-a/2 \le x \le 1 + \sqrt{1 + a}$; **в)** если $a \le -1/4$, то $x \in \mathbb{R}$; если $-1/4 < a < 2$, то $x \in (-\infty; (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2] \cup [(-1 + \sqrt{1 + 4a})/2; +\infty)$; если $a \ge 2$, то

$x \in (-\infty; (-1-\sqrt{4a^2-12a+17})/2] \cup [(-1+\sqrt{4a^2-12a+17})/2; +\infty)$.

4.7.5. а) Если $a \le \sqrt{3/2}$, то решений нет; если $\sqrt{3/2} < a \le \sqrt{3}$, то $3a^2-2-2a\sqrt{2a^2-3} < x < 3a^2-2+2a\sqrt{2a^2-3}$; если $a > \sqrt{3}$, то $1 \le x < 3a^2-2+2a\sqrt{2a^2-3}$; **б)** если $a \le 2$, то решений нет; если $2 < a < 4$, то $x \in \left[-a; -\dfrac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right) \cup \left(\dfrac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}; a\right]$; если $a = 4$, то $x \in [-a; 0) \cup (0; +\infty)$; если $a > 4$, то $-a \le x \le a$; **в)** если $a \le 1$, то решений нет; если $a > 1$, то $0 \le x < (a-1)^2/4$. **4.7.6. а)** Если $a < 0$, то $a \le x \le 0$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $0 < x < a$; **б)** если $a < 0$, то $x \in [(1+1/\sqrt{2})a; 0]$; если $a \ge 0$, то $x \in \left[(1-1/\sqrt{2})a; 2a\right]$. **4.7.7. а)** Если $a > 0$, то $-a < x < a$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; если $a < 0$, то $a < x < -a$; **б)** если $a < 0$, то $x \in \left(0; a/(a-2)\right] \cup (1; +\infty)$; если $0 \le a \le 2$, то $x > 1$; если $a > 2$, то $1 < x \le a/(a-2)$.

4.8.1. а) $-2 \le p < 2$; **б)** $-2 < p \le 2$. **4.8.2. а)** $p \in (-\infty; 3/7) \cup [4; +\infty)$; **б)** $p \in (-\infty; 5) \cup [10; +\infty)$. **4.8.3. а)** $a \ge 4$; **б)** $a \in \mathbb{R}$; **в)** $a \in [-\sqrt{3}; 0) \cup (0; \sqrt{3}]$; **г)** $a \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **4.8.4. а)** $0 < a < \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$; **б)** $a \in (-\infty; -2) \cup \{-7/4\}$; **в)** $a = 1$ и $-1/2 \le a \le -3/22$. **4.8.5. а)** Если $a \ge 0$, то одно решение; если $a < 0$, то два решения; **б)** если $a < -1/6$, то решений нет; если $a \ge -1/6$, то одно решение. **4.8.6. а)** Если $a \in (0; 1) \cup (1; 3]$, то $x = -a-3$; если $a > 3$, то $x = -a-3$ и $x = a$; **б)** если $a \in (-8; -3) \cup (-3; +\infty)$, то $x = 4 - \sqrt{12+a}$; **в)** если $0 < a \le 1$ или $a = \sqrt{2}$, то решений нет; если $1 < a < \sqrt{2}$ или $a > \sqrt{2}$, то $x = -1$ и $x = 1$. **4.8.7. а)** Если $a = 0$, то решений нет; если $a < 0$, то $x = \log_3(-a)$, если $a > 0$, то $x = \log_3 a - 2$; **б)** если $a \le 0$, то $x_{1,2} = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; если $0 < a < 1$, то $x_{1,2} = \pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$,

$x_{3,4} = \pm\log_{12}(1-\sqrt{1-a})$; если $a=1$, то $x=0$, если $a>1$, то решений нет; **в)** если $a\in(-\infty;3]\cup[27;+\infty)$, то решений нет; если $3<a<27$, то $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$. **4.8.8. а)** Если $a\le 0$ и $a=1$, то решений нет; если $a>0$ и $a\ne 1$, то $x=(1+\sqrt{1+4a^2})/2$; **б)** если $a\le 0$ и $a=1$, то решений нет; если $a>0$ и $a\ne 1$, то $x=a$; **в)** если $a\le 0$, то решений нет; если $a>0$ и $a\ne 1$, то $x_1=1/\sqrt{a}$ и $x_2=a^{-4/3}$; если $a=1$, то $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. **4.8.9. а)** Если $a\le 0$ и $a=1$, то решений нет; если $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, то $x_1=a^2$ и $x_2=1/a$; **б)** если $a\le 0$ и $a=1$, то решений нет; если $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, то $x_1=a$ и $x_2=1/a$. **4.8.10.** $x=1$. ***Указание.*** Решите уравнение при $a=1$. **4.8.11. а)** $a>-1$; **б)** $a=0$ и $1\le a<\log_2(5+\sqrt{5})-1$. **4.8.12. а)** $a\in(-1;3)$; **б)** $a\in\left(-5;(4-\sqrt{27})/2\right)$. **4.8.13. а)** $a\in(-1;0)\cup(2;9/4)\cup(9/4;19/8)$; **б)** $a\in(0;1)\cup(17/11;8/5)\cup(8/5;17/10)$.

4.9.1.а) $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **б)** $a>0$. **4.9.2.а)** $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$; **б)** $0<a<1$. **4.9.3. а)** $a\ge 1$; **б)** $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **4.9.4. а)** $1<a<2$; **б)** $a\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$; **в)** $a<-2$; **г)** $a\in(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$; **д)** $a\in(-\sqrt{4+\sqrt{5}};-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\sqrt{4+\sqrt{5}})$. **4.9.5.а)** Если $a\le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(0;1)$, если $a>1$, то $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; **б)** если $a\le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-1;a-1)$; если $a>1$, то $x>a-1$; **в)** если $a\le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-1-\sqrt{2};-2)\cup(0;-1+\sqrt{2})$; если $a>1$, то $x\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup$ $\cup(-1+\sqrt{2};+\infty)$; **г)** если $a\le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-\infty;-1-\sqrt{1+a})\cup(-1+\sqrt{1+a};+\infty)$; если $a>1$, то

$x \in (-1-\sqrt{1+a};-2) \cup (0;-1+\sqrt{1+a})$. **4.9.6.а)** Если $a=0$, то решений нет; если $a>0$, то $x<-2+\log_3 a$; если $a<0$, то $x<\log_3(-a)$; **б)** если $a \le 0$, то решений нет; если $a>0$, то $x \in (-a;a)$; **в)** если $a>0$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \le 0$, то $x \in (-\infty;a] \cup [-a;+\infty)$. **4.9.7.а)** Если $a \in (-\infty;2]$, то $x \in (-\infty;1]$; если $a \in (2;11)$, то $x \in [\log_9(a-2);1]$; если $a=11$, то $x=1$; если $a \in (11;+\infty)$, то $x \in [1;\log_9(a-2)]$; **б)** если $a \in (-\infty;1]$, то $x \in (-\infty;-1]$; если $a \in (1;5)$, то $x \in (-\infty;-1] \cup [-\log_4(a-1);+\infty)$; если $a=5$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \in (5;+\infty)$, то $x \in (-\infty;-\log_4(a-1)] \cup [-1;+\infty)$. **4.9.8.а)** Если $0<a<1$, то $x \in (-\infty;-\log_a(a+2))$; если $a=1$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a>1$, то $x \in (-\log_a(a+2);+\infty)$; **б)** если $a \le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x \in (-\infty;0) \cup \left(\log_a \dfrac{2a}{a+1};1\right)$; если $a>1$, то $x \in \left(0;\log_a \dfrac{2a}{a+1}\right) \cup (1;+\infty)$. **4.9.9. а)** Если $0<a<1$, то $x \in (0;a) \cup (1;1/a)$; если $a>1$, то $x \in (1/a;1) \cup (a;+\infty)$; **б)** если $0<a<1$, то $x \in \left(a^4;1/a\right)$; если $a>1$, то $x \in \left(1/a;a^4\right)$; если $a \le 0$ или $a=1$, то решений нет; **в)** если $0<a<1$, то $x \in (0;a) \cup \left(1/a;+\infty\right)$; если $a>1$, то $x \in \left(1/a;1\right) \cup (1;a)$; **г)** $x \in (0;a) \cup (a^{-4};+\infty)$. **4.9.10.а)** Если $a<0$, то $x \in \left(1;(1+\sqrt{1-4a})/2\right)$; если $a=0$, то решений нет; если $0<a \le 1/4$, то $x \in \left(a;(1-\sqrt{1-4a})/2\right) \cup \left((1+\sqrt{1-4a})/2;1\right)$; если $1/4<a<1$, то $x \in (a;1)$; если $a \ge 1$, то решений нет; **б)** если $a \le 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x \in \left[a^{(3+\sqrt{5})/2};a^{(3-\sqrt{5})/2}\right] \cup (1;+\infty)$; если $a>1$, то $x \in (0;1) \cup \left[a^{(3-\sqrt{5})/2};a^{(3+\sqrt{5})/2}\right]$; **в)** если $a<0$, то

$x \in \left(0; 3^{-1-\sqrt{-1/a}}\right] \cup \left(1/3; 3^{-1+\sqrt{-1/a}}\right]$; если $a \geq 0$, то $x > 1/3$; **г)** если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \in (0; a) \cup (16a; +\infty)$. **4.9.11. а)** $x \in (3{,}5; 4)$; **б)** $x \in (2; 2{,}5]$. **4.9.12. а)** $a = 2$; **б)** $a = 0$. **4.9.13. а)** Если $0 < a < 1$, то $x \in (a; 1)$; если $a > 1$, то $x \in (1; a)$; **б)** $(0; 1/2 - a - \sqrt{1/4 - a}) \cup$ $\cup (1/2 - a + \sqrt{1/4 - a}; 1 - a) \cup (1; +\infty)$; **в)** если $0 < a \leq 1$, то решений нет; если $1 < a < 2$, то $x \in (-\infty; \log_{a-1}(2a)] \cup [0; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \in [0; +\infty)$; если $a > 2$, то $x \in [0; \log_{a-1}(2a)]$; **г)** если $0 < a \leq \sin 1$, то $x \in (a; \arcsin a) \cup (1; \pi/2)$; если $\sin 1 < a < 1$, то $x \in (a; 1) \cup (\arcsin a; \pi/2)$; если $1 < a < \pi/2$, то $x \in (0; 1) \cup (a; \pi/2)$; если $a \geq \pi/2$, то $x \in (0; 1)$.

4.10.1. а) Если $a \in [-1; 0{,}5]$, то $x = \pm \arccos \dfrac{4a+1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a \in (-\infty; -1) \cup (0{,}5; +\infty)$, то решений нет; **б)** если $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$, то $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{a-1} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a = -1$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \in (0; 2)$, то решений нет; **в)** если $a \neq -5$ и $a \neq 5$, то $x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{a-5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a = -5$, то $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a = 5$, то решений нет. **4.10.2. а)** $-\sqrt{5} \leq a \leq \sqrt{5}$; **б)** $-7 \leq a \leq 7$; **в)** $a \in [-1; 5/3]$; **г)** $a \in \left[(1-\sqrt{2})/2; 1\right]$; **д)** $a \in \left[(2-\sqrt{5})/2; 2\right]$. **4.10.3.** $\pm\sqrt{2}/2$ и 0. **4.10.4. а)** $(-1; -0{,}5) \cup \{-0{,}25\}$; **б)** $\{-1; 0{,}5\}$. **4.10.5. а)** Если $a < 1$, то решений нет; если $1 \leq a < 3$, то $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{2}{1+a} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$; если $a \geq 3$, то $x_1 = (-1)^n \arcsin \dfrac{2}{1+a} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$ и $x_2 = (-1)^k \arcsin \dfrac{2}{1-a} + \pi k,$

$k\in\mathbb{Z}$; **б)** если $a\le -4$, то $x=\pm\arccos\dfrac{5}{1-a}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$; если $-4<a<4$, то решений нет; если $a\ge 4$, то $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{5}{1+a}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **4.10.6. а)** Если $a\ne 0$, то $x=2\pi n\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a=0$, то $x=\pi n+\dfrac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** если $a\in(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$, то решений нет; если $-5\le a\le 3$, то $x=(-1)^n\arcsin(-2+\sqrt{4-a})+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; **в)** если $a\in[-\sqrt[4]{2};\sqrt[4]{2}]$, то $x=2\pi n\pm\arccos\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in(-\infty;-\sqrt[4]{2})\cup(\sqrt[4]{2};+\infty)$, то решений нет; **г)** если $a\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$, то $x=\pi n\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{\sqrt{10}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in(-\infty;-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10};+\infty)$, то решений нет. **4.10.7. а)** 10; **б)** 9. **4.10.8. а)** $a\ge\dfrac{2}{7}$; **б)** $a\le -\dfrac{2}{9}$. **4.10.9. а)** Если $a\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)\cup$ $\cup(-1;+\infty)$, то одно решение; если $a\in\left\{\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2};-1\right\}$, то два решения; если $a\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2};-1\right)$, то три решения; **б)** если $a\in(-\infty;1/4)\cup[1/2;+\infty)$, то одно решение; если $a=1/4$, то два решения; если $1/4<a<1/2$, то три корня. **4.10.10. а)** Если $a\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};-1]\cup[1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$, то $x=\pm\arccos(1/a)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a=\sqrt{2}$, то $x=\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a=-\sqrt{2}$, то $x=-3\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in(-1;1)$, то решений нет; **б)** если $a\ne -b\sqrt{2}$ или $a\ne b\sqrt{2}$, то $x=\pi/4+\pi n$,

$n\in\mathbb{Z}$; если $a=b\sqrt{2}$, то $x=5\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a=-b\sqrt{2}$, то $x=\pi/4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.10.11. а)** если $a\in(-\infty;-5/4)\cup(5;+\infty)$, то $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in[-5/4;1]$, то $x_1=2\pi n$, $x_2=4\pi n\pm 2\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in(1;5]$, то $x_1=2\pi n$, $x_2=4\pi n\pm 2\arccos\dfrac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$. ***Указание.*** Разложите $\sin\dfrac{3x}{2}$ по формуле тройного аргумента; **б)** если $a\in[-3/2;1/2]$, то $x=\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{(-1)^n}{2}\arcsin(1-\sqrt{3+2a})$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\notin[-3/2;1/2]$, то решений нет; **в)** если $a\in(-\infty;6]\cup(8;+\infty)$, то $x=\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\in(6;8]$, то $x_1=\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi n}{2}\pm\dfrac{1}{4}\arccos(a-7)$, $n\in\mathbb{Z}$; **г)** если $a=\pi/2+\pi n$ или $a=\pi/4+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$, то решений нет; $x=-a-\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ при других значениях a. **4.10.12. а)** Если $a\le -1$, то $x\in\mathbb{R}$; если $-1<a\le 1$, то $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\arccos a+\pi n\le x\le\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\arccos a+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a>1$, то решений нет; **б)** если $a>1$ или $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $0<a\le 1$, то $\dfrac{\pi(2n+1)-\arcsin a+3}{a}<x<\dfrac{2\pi(n+1)+\arcsin a+3}{a}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $-1<a<0$, то $\dfrac{2\pi n+\arcsin a+3}{a}<x<\dfrac{\pi(2n+1)-\arcsin a+3}{a}$, $n\in\mathbb{Z}$; если $a\le -1$, то решений нет; **в)** если $a<0$, то $\dfrac{\pi(2n+1)-4}{2a}<x\le\dfrac{\operatorname{arctg} b+\pi n-2}{a}$; если $a=0$ и $b\le \operatorname{tg}2$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a=0$ и $b>\operatorname{tg}2$, то решений нет; если $a>0$, то $\dfrac{\operatorname{arctg} b+\pi n-2}{a}\le x<\dfrac{\pi(2n+1)-4}{2a}$. **4.10.13. а)** Пусть

$\varphi = \arcsin\dfrac{3a+4}{a-2}$. Тогда, если $a<-3$, то $x \in \mathbb{R}$; если $-3 \le a < -0,5$, то $-\varphi + \pi(2n-1) < x < \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a \ge -0,5$, то решений нет; **б)** пусть $\varphi = \arccos\dfrac{a+5}{5a-7}$, тогда: если $a < 1/3$, то $-\varphi + 2\pi n < x < \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; если $1/3 < a < 3$, то $x \in \mathbb{R}$; если $a \ge 3$, то $\varphi + 2\pi n < x < -\varphi + 2\pi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. **4.10.14. а)** $\dfrac{-\arcsin(1-2a)+\pi(2n+1)}{4} \le x \le \dfrac{\arcsin(1-2a)+\pi(2n+1)}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{-\arccos(2a-1)+2\pi n-2}{2} < x < \dfrac{\arccos(2a-1)+2\pi n-2}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.10.15. а) Если $a<0$ или $a>1$, то $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n; -\mathrm{arctg}2+\pi n\right) \cup \left(\mathrm{arctg}\dfrac{a+2}{a-1}+\pi n; \dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a=0$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x \in \left(\mathrm{arctg}\dfrac{a+2}{a-1}+\pi n; -\mathrm{arctg}2+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; если $a=1$, то $x \in \left(-\pi/2+\pi n; -\mathrm{arctg}2+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** обозначим $\varphi_1 = \arccos\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$, $\varphi_2 = \arccos\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, тогда, если $a \le -2$, то $\varphi_1 + 2\pi n < x < -\varphi_1 + 2\pi(n+1)$; если $-2<a<2$, то $-\pi/2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n$; если $a \ge 2$, то $\varphi_2 + 2\pi n < x < \pi/2 + 2\pi n$, $-\pi/2 + 2\pi n < x < -\varphi_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.10.16. а) $x \in (2\varphi + 2\pi n; 2\pi(n+1))$, где $\varphi = \mathrm{arcctg}a$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$; **б)** $x = \pi + 2\pi n$ и $-\pi + 2\pi n < x < -\pi/2 + 2\mathrm{arctg}a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$; **в)** если $a \le 0,5$, то $x \in \mathbb{R}$; если $0,5 < a < 1$, то $x \in \left(-\dfrac{\varphi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}; \dfrac{\varphi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\varphi = \arccos(4a-3)$; если $a \ge 1$, то решений нет. **4.10.17. а)** $a > 5/8$**; б)** $a > 3/82$**.**

Ответы и указания к задачам главы V

5.1.1. а) $D_f = (-\infty; a) \cup (a; +\infty)$ при всех $a \in \mathbb{R}$; **б)** если $a < 0$, то $D_f = [a; -a) \cup (-a; +\infty)$; если $a = 0$, то $D_f = (0; +\infty)$; если $a > 0$, то $D_f = (a; +\infty)$; **в)** если $a < 0$, то $D_f = \varnothing$; если $a = 0$, то $D_f = \{0\}$; если $a > 0$, то $D_f = [-a; a]$; **г)** $D_f = \{-a\} \cup \{a\}$ при всех $a \in \mathbb{R}$; **д)** если $|a| \le 1$, то $D_f = [-\sqrt{1+a^2}; \sqrt{1+a^2}]$; если $|a| > 1$, то $D_f = [-\sqrt{a^2+1}; -\sqrt{a^2-1}] \cup [\sqrt{a^2-1}; \sqrt{a^2+1}]$; **е)** если $a \le -3$, то $D_f = (-\infty; a) \cup (-3; +\infty)$; если $a > -3$, то $D_f = (-\infty; -3) \cup (a; +\infty)$. **5.1.2. а)** Если $a < 0$, то $D_f = \varnothing$; если $a = 0$, то $D_f = (0; +\infty)$; если $0 < a < 3$, то $D_f = [0; +\infty)$; если $a = 3$, то $D_f = (0; +\infty)$; если $a > 3$, то $D_f = (a-3; +\infty)$; **б)** если $a \le 0$, то $D_f = \varnothing$; если $a > 0$, то $D_f = (0; 1/a)$; **в)** если $a \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$, то $D_f = \varnothing$; если $0 < a \le 3$, то $D_f = [-2a; a^2 - 2a)$; **г)** если $a \ge 0$, то $D_f = [-a; a]$; если $a < 0$, то $D_f = [a; -a]$; **д)** если $a < -4\pi$, то $D_f = \varnothing$; если $-4\pi \le a < 1{,}5\pi$, то $D_f = \begin{cases} k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ x > a, \end{cases}$ где $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$; если $1{,}5\pi \le a < 2\pi$, то $D_f = \{2\pi\}$; если $a \ge 2\pi$, то $D_f = \varnothing$. **5.1.3. а)** Если $a < 0$, то $E_f = [0; \sqrt{2a}) \cup (\sqrt{2a}; +\infty)$; если $a = 0$, то $E_f = (0; +\infty)$; если $a > 0$, то $E_f = [0; +\infty)$; **б)** если $a < 0$, то функция не определена; если $a = 0$, то $E_f = 0$; если $a > 0$, то $E_f = [-\sqrt{2a}; \sqrt{2a}]$; **в)** $E_f = \{0\}$ при всех $a \in \mathbb{R}$; **г)** если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то $E_f = [0; \pi]$; если $a = 0$, то функция не определена; **д)** $E_f = (-\infty; +\infty)$ при всех $a \in \mathbb{R}$. **5.1.4. а)** $(-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}; +\infty)$; **б)** $\mathbb{R}$. **5.1.5. а)** $a = -4{,}5$; **б)** $a = 5/3$, $b = -1/3$. **5.1.6. а)** При $a = 2$ функция четная; при $a = 4/3$

функция нечетная; **б)** при $a=-2$ или $a=2$ – четная; **в)** при $a=-2$ функция нечетная; при $a=-\sqrt{5}$ или $a=\sqrt{5}$ функция четная. **5.1.7. а)** $a=0$; **б)** $a=1$. **5.1.8. а)** $a=-0{,}5$; **б)** $a=-1$. **5.1.9. а)** При $a=\dfrac{3\pi}{2}+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, функция нечетная; при $a=0$ функция четная; **б)** при $a=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, функция нечетная; при $a=0$ – четная. **5.1.10.** При $a>0$ функции $f_1(x)$ и $f_5(x)$ – четные; $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ – нечетные. **5.1.11.** $b=1$. **5.1.12. а)** При $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; $f^{-1}(x)=\dfrac{x-\sqrt{a^2}}{a^2-4}$; **б)** при $a\geq-2$; $f^{-1}(x)=-2+\sqrt{7+x}$. **5.1.13. а)** $a=-1$, $b\in\mathbb{R}$ или $a=\pm1$, $b=0$; **б)** $a_1=-1$ и $a_2=1$. **5.1.14. а)** $a\in(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[4;+\infty)$; **б)** $a\in(-\infty;-3]\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$. **5.1.15.а)** $x=\dfrac{2-4a\pm\sqrt{16a^2-16a+3}}{4}$. ***Указание.*** Рассмотрите возрастающую функцию $y=x^2+2ax+1/16$ на $[-a;+\infty)$. Она обратима при $x\geq1/16-a^2$ и обратная к ней есть функция $y=-a+\sqrt{a^2+x-1/16}$. Далее решите уравнение $x=-a+\sqrt{a^2+x-1/16}$; **б)** $x=a-a^5$. **5.1.16.** $-1/12\leq a\leq0$. **5.1.17. а)** $a=2$; **б)** $a=1$; **в)** $a=1$ или $a=3$; **г)** необходимо и достаточно выполнения равенства $a+b=0$; **д)** $2a-b=0$. **5.1.18.** $a=-3$. **5.1.19.** $n\in\{-2;-1;1;2\}$. **5.1.20.** $a\in\{-1;0;1/3\}$. **5.1.21. а)** ***Указание.*** Используя условия $f(a+x)=f(a-x)$ и $f(b+t)=f(b-t)$, докажите, что период функции равен $2(b-a)$. **5.1.22. а)** ***Указание.*** Из условия $f(x+T)=\sin(x+T)+\cos b(x+T)$ получите равенства $\cos bT=1$ и $\sin T=1$, из которых следует, что $b=\dfrac{2m}{k}$, где $m,k\in\mathbb{Z}$. **5.1.23. а)** $a>1$; **б)** $a<1$. **5.1.24. а)** $a\in(0;3]$; **б)** $a\in[-1;0]$. **5.1.25.** $a\geq-4$.

5.1.26. а) $x=\dfrac{(3\sqrt{a}-\sqrt{a^2-8})^2}{32}$; **б)** $x=a$. ***Указание.*** Преобразуйте уравнение к виду $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{x-a}=\sqrt[5]{2a}$; **в)** $x=1$. ***Указание.*** Пусть $t=x^2-2x+1$. Тогда неравенство примет вид $\log_a\left(2t+a^{t+4}\right)\le 4$. При $a>1$ имеет место неравенство $2t+a^{t+4}\le a^4$. Отсюда следует $t=0$. **5.1.27. а)** Если $a\ge b+1$, то $x=y=\dfrac{(a-b-1)^2}{4}-b$; если $a<b+1$, то решений нет. ***Указание.*** Вычитая из первого уравнения второе, получите равенство $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{y+a}+\sqrt{y+b}$. Рассмотрите возрастающую функцию $f(t)=\sqrt{t+a}+\sqrt{t+b}$; **б)** если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то $x=y=0$; если $a>0$, то $x=\sqrt{2a}$, $y=2a+\sqrt{2a}$ и $x=-\sqrt{2a}$, $y=2a-\sqrt{2a}$. ***Указание.*** Перепишите первое уравнение в виде $x+2a+3^{x+2a}=y+3^y$. Далее рассмотрите функцию $f(t)=t+3^t$. **5.1.28. а)** $y_{наиб.}=f(0,5)=\sqrt{6}$; $y_{наим.}=f(1)=\sqrt{3}$; б) $y_{наим.}=2$; наибольшего значения нет. **5.1.29. а)** $y_{наиб.}=5|a|$; $y_{наим.}=-5|a|$; **б)** $y_{наиб.}=\sqrt{2+2a^2}$; $y_{наим.}=-\sqrt{2+2a^2}$; **в)** если $a<-1/6$, то $y_{наиб.}=-12a-1$ и $y_{наим.}=12a-1$; если $0>a\ge-1/6$, то $y_{наиб.}=-12a-1$ и $y_{наим.}=-36a^2-2$; если $1/6>a\ge 0$, то $y_{наиб.}=12a-1$ и $y_{наим.}=-36a^2-2$; если $a\ge 1/6$, то $y_{наиб.}=12a-1$ и $y_{наим.}=-12a-1$; **г)** если $a\le-1/3$, то $y_{наиб.}=-6a+2$ и $y_{наим.}=6a+2$; если $0\ge a\ge -1/3$, то $y_{наиб.}=9a^2+3$ и $y_{наим.}=6a+2$; если $1/3>a>0$, то $y_{наиб.}=9a^2+3$ и $y_{наим.}=-6a+2$; если $a\ge 1/3$, то $y_{наиб.}=6a+2$ и $y_{наим.}=-6a+2$. **5.1.30. а)** Если $a<-1$, то $y_{наиб.}=1-\dfrac{1}{4a}$ и $y_{наим.}=9a+4$; если $-1\le a<-1/6$, то $y_{наиб.}=1-\dfrac{1}{4a}$ и $y_{наим.}=4a-1$; если $-1/6\le a<0$, то $y_{наиб.}=9a+4$ и $y_{наим.}=4a-1$;

если $a=0$, то $y_{наиб.}=4$ и $y_{наим.}=-1$; если $0<a<1/4$, то $y_{наиб.}=9a+4$ и $y_{наим.}=4a-1$; если $a\geq 1/4$, то $y_{наиб.}=9a+4$ и $y_{наим.}=1-\dfrac{1}{4a}$; **б)** если $a<-1$, то $y_{наиб.}=a^2+5a+6$ и $y_{наим.}=a^2-a$; если $a\geq -1$, то $y_{наиб.}=a^2-a$ и $y_{наим.}=a^2+5a+6$. **5.1.31. а)** Если $a=0$, то наибольшего и наименьшего значений у функции не существует; если $a\neq 0$, то $y_{\min}=2|a|$ при $x=a$; **б)** если $a=0$, то $y_{\max}=2|a|$ при $x=1$ ($x\neq a$); если $a\neq 0$, то $y_{\max}=2+a$ при $x=1+a$ и $y_{\min}=-2+a$ при $x=-1+a$ ($x\neq a$); **в)** $y_{\min}=2a^2$ при $x=-a$ и $x=a$ ($x\neq 0$); **г)** если $0<a\leq 1/\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$; если $1>a>1/\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $a=1$, то $y_{наиб.}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $\sqrt{3}\geq a>1$, то $y_{наиб.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=2$; если $a>\sqrt{3}$, то $y_{наиб.}=\dfrac{1+3a}{\sqrt{3}}$ и $y_{наим.}=\dfrac{3+a}{\sqrt{3}}$. **5.1.32. а)** $a\geq -7$; **б)** $a\geq -5$; **в)** $a\geq 0$; **г)** $|a|\leq 3$.

5.2.1. а) -7; **б)** $a_1=-10$ и $a_2=2$; **в)** -3; **г)** $1/16$. **5.2.2.** $a=9/7$. **5.2.3. а)** $p=3$; $q=2$; **б)** $p=1$; $q=1$. **5.2.4. а)** $a_1=-4$ и $a_2=4$; **б)** $-4<a<4$; **в)** $a\in(-\infty;60\ln 5-35]$. ***Указание.*** Определить a_0 из условия, что прямая $y=60x-a$ является касательной к графику функции $y=e^{2x}+2e^x$. **5.2.5. а)** $a\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$; **б)** $a\in[-4;(3-\sqrt{21})/2]\cup(1;+\infty)$; **в)** $a\in(-\infty;3/8)$. **5.2.6. а)** При $t\leq -1$, $t\geq 2$; **б)** $p\leq -1{,}5$, $p\geq 1$. **5.2.7. а)** $b<-2$; **б)** 2. **5.2.8. а)** Если $a\in(-\infty;0)\cup\{27/e^3\}$, то один корень; если $a\in(0;27/e^3)$, то два корня; если $a\in(27/e^3;+\infty)$, то нет корней; **б)** $a\in(-\infty;0]\cup\{1/2e\}$. **5.2.9.** $k=15$. **5.2.10. а)** $p\in(-\infty;-1/2]$; **б)** $p\in[1/4;+\infty)$; **в)** $p\in[-8;+\infty)$;

г) $p \in [1;+\infty)$. **5.2.11.** $\left[21;+\infty\right)$. **5.2.12.** $a=1$. **5.2.13.** $a=b=\sqrt{S}$. **5.2.14.** $\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **5.2.15.** $2a$. **5.2.16.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **5.2.17.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **5.2.18.** $\frac{a}{6}$. **5.2.19.** $\frac{4}{27}\pi HR^2$. **5.2.20.** $\frac{4R}{3}$. **5.2.21.** $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **5.2.22.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **5.2.23.** $\frac{3v_1-5v_2}{v_1^2+v_2^2}$, если $3v_1 \ge 5v_2$; 0, если $3v_1<5v_2$. **5.2.24.** 20 $км/_{час}$. **5.2.25.** 25.

5.3.1. а) $a=\frac{2}{\ln 3}$, $b=12-\frac{12}{\ln^2 3}$; **б)** $a=-\frac{2}{\pi}$, $b=2$. **5.3.2. а)** $a=1$; **б)** $a=3$. **5.3.3. а)** $\sqrt{2\pi}$, $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$; **б)** $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{1-\sqrt{1+2\pi}}{2}$. **5.3.4. а)** $b=0$; **б)** $a_1=0$ и $a_2=4$; **в)** $a=-1$; **г)** $a=\pm 2$; **д)** если $a \ge -3$, то значений b, удовлетворяющих условию задачи, не существует; если $a<-3$, то $b=-6-a$; **е)** $a=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; **ж)** $a \in \mathbb{R}$, $b=2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.3.5. а)** 0; **б)** $\frac{\pi a^2}{2}$. ***Указание.*** Интеграл дает значение площади полукруга радиуса a. **5.3.6. а)** Если $a \le 0$, то a^2-4; если $a>0$, то $\frac{a^2}{3}-4$; **б)** если $a \le \pi/4$, то $\sin a+1$; если $a>\pi/4$, то $\sin a-\cos a+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **в)** если $a \le 0$, то $12+a-a^2$; если $0<a \le 1$, то $a+12$; если $a>1$, то a^2-a+13; **г)** если $a \le 1$, то $3-a$; если $1<a \le 2$, то a^2-3a+4; если $a>2$, то a. **5.3.7. а)** $a_1=-\pi/6$ и $a_2=\pi/3$; **б)** $a_1=-\pi/30$ и $a_2=\pi/6$. **5.3.8. а)** $a=6$ и $a=6/5$; **б)** $a=1/4$ и $a=9/4$; **в)** $S=a$ при $b=\sqrt{\frac{8}{3a}-1}$. Задача имеет решение при $a \in (0;8/3)$. **5.3.9.** $b=-4$, $c=3$, $S=5\frac{1}{3}$. **5.3.10.** $\frac{200}{243}$. ***Указание.*** Уравнение касательной имеет вид $y=\frac{4}{3}a^2x-\frac{16}{27}a^3$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox равна $\frac{4}{9}a$. Площадь треугольника $\frac{50}{243}a^4$. **5.3.11. а)** $a=1$; **б)** $a=\frac{1}{2(e-1)}$. **5.3.12. а)** $2\pi+2{,}5$; **б)** $\frac{2\pi}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **5.3.13.** ***Указание.*** Пусть для простоты $c=0$, $b=1$ и $f(b)=1$. При фиксированном a найдите выражение $S(a)=f(a)(2a-1)-2F(a)+F(0)+F(1)$, где $F'(x)=f(x)$, а $S'(a)=f'(a)(2a-1)+2f(a)-2f(a)=0$. Последнее уравнение в силу монотонности $f(a)$ имеет единственный корень на промежутке $[0;1]$. Далее исследуйте функцию $S(a)$ на экстремум. **5.3.14. а)** $a=3/4$; **б)** $a=2/3$. **5.3.15.** $a=1+\sqrt[3]{16}$. **5.3.16.** $S_{\min}=\frac{4}{3}(b-a^2)^{3/2}$. Уравнение прямой $y=2ax+b-2a^2$. **5.3.17. а)** $a=3$, $S_F=\frac{7\ln 6-10}{3}$; **б)** $S_M=18$, $S_F=\frac{73}{6}$.

5.4.1. При $a=10$ $x \in \{-\sqrt{10};-\sqrt{7};-\sqrt{3};0;\sqrt{3};\sqrt{7};\sqrt{10}\}$. **5.4.2. а)** $a_1=0$, $a_2=2\sin 1$; **б)** $a_1=0$, $a_2=\operatorname{tg}1$. **5.4.3. а)** $a=2$; **б)** $a=2$. **5.4.4. а)** $a=4/3$; **б)** $a=2/5$. **5.4.5. а)** $a=1/8$. ***Указание.*** Заметьте, что если пара чисел $(x_0;y_0)$ является решением, то пара $(y_0;x_0)$ – также решение. Следовательно, необходимое условие единственности решения – выполнение равенства $x=y$; **б)** $a=-1/4$. **5.4.6.** $a=0$ и $a=1$. **5.4.7. а)** $a=2{,}5$; **б)** $a\in\{-4;4;6\}$. **5.4.8.** 0 или 3. **5.4.9.** $a\in(1;4)\cup\{65/16\}$. **5.4.10.** $|a|\in(19-6\sqrt{10})\cup\{4\}$. ***Указание.*** Воспользуйтесь симметрией ромба и окружности относительно оси Ox.

Список рекомендуемой литературы:

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике. – Мн.: «Асар», 1996.

2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. Издание второе, дополненное и переработанное. – Киев. «Евроиндекс», 1995.

3. Дорофеев Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. – Львов. Журнал «Квантор», 1991.

4. Марков В.К. Метод координат и задачи с параметрами. Москва. Издательство Московского университета.1970.

5. Моденов В.П. Математика для школьников и абитуриентов. – М.: Институт компьютерных исследований; Наука, Физматгиз, 2002.

6. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики. – М.: Школа-Пресс, 1995.

7. Родионов Е.М. Решение задач с параметрами: Пособие для поступающих в вузы. – М.: МП «Русь-90», 1995.

8. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989.

9. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.

10. Шестаков С.А., Юрченко Е.В. Уравнения с параметром. – М.: Слог, 1993.

12. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1989.

13. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986.

Содержание

Прокофьев *Александр Александрович*

Задачи с параметрами

Пособие по математике
для учащихся старших классов

Корректор И.Я. Раонди

Компьютерный набор и верстка А.А. Прокофьев

МИЭТ. Печатается с оригинала-макета 2004 г.

Формат 60×84 1/16. Гарнитура “Таймс Нью Роман”. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 15,08. Уч.-изд. 13. Тираж 600 экз.

103498, Москва, МИЭТ