РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II (муниципальный) этап, 2014 год,
7 класс

7.1. Две черепахи ползут наперегонки. Первая проползает 4 метра за каждые 9 часов, а вторая – 5 метров за каждые 11 часов. Какая черепаха ползет быстрее?

7.2. Придя в тир, Петя купил 5 пуль. За каждый успешный выстрел ему дают еще 5 пуль. Петя утверждает, что он сделал 50 выстрелов и 8 раз попал в цель, а его друг Вася говорит, что этого не может быть. Кто из мальчиков прав?

7.3. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что если к числу прибавить 9, то число станет делиться на 9, а его цифры поменяются местами и получится новое двузначное число. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок (обязательно обоснуйте, что других вариантов нет).

7.4. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180 градусов, и два других тоже.

7.5. Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то из них они тут же съели вместе, 45% оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II (муниципальный) этап, 2014 год, 8 класс

8.1. У Карлсона есть варенье в семи банках вместимостью 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 литров. Он решил расставить своё варение на четыре полки так, чтобы на каждой полке было одинаковое количество литров. Помогите Карлсону.

8.2. Цена билета на стадион была 25 рублей. После снижения цен на билеты, число зрителей на стадионе увеличилось на 50 %, а выручка с проданных билетов увеличилась на 14 %. Сколько стал стоить билет на стадион после снижения цен?

8.3. К числу 2014 приписали по цифре слева и справа. Полученное таким образом шестизначное число стало делиться на 36. Найдите все такие шестизначные числа.

8.4. В треугольнике *ABC* провели биссектрисы *AD* и *CE*. Оказалось, что $AE + CD = AC$. Найдите угол *B*.

8.5. На доске написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Одно число изменили на 1, потом одно из написанных изменили на 2, затем – на 3, и так далее до изменения на 10. Можно ли таким образом получить другие десять подряд идущих натуральных чисел?

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II (муниципальный) этап, 2014 год, 9 класс

9.1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок заплакал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая – у Пятачка?

9.2.. Докажите, что для всех положительных чисел *a, b, c, d* выполняется неравенство $\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{d} \geq \frac{(a+c)^2}{b+d}$.

9.3. Найдите какие-нибудь пять последовательных натуральных чисел, меньших 100, произведение которых делится на 2014.

9.4. Дан прямоугольник *ABCD*. На луче *DC* отложен отрезок *DK*, равный *DB*. *M* – середина отрезка *BK*. Докажите что *AM* – биссектриса угла *BAC*.

9.5. В уравнении $*x^2 + *x + * = 0$ двое по очереди вместо любой звёздочки ставят произвольное число (при x^2 нуль ставить нельзя). Первый выигрывает, если полученное уравнение не имеет корней, а второй – в противном случае. Может ли кто-нибудь из них выиграть, независимо от игры партнёра?

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II (муниципальный) этап, 2014 год, 10 класс

10.1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

10.2. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда $3\times4\times5$ разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клеточном кольце ширины 1, опоясывающем параллелепипед, была равна 120?

10.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

10.4. В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка E, на стороне CD – точки F и G (точка F между C и G), на стороне AD – точка H. При этом $CE = CF$, $DG = DH$. Докажите, что вокруг четырехугольника, образованного пересечением углов HBG и EAF, можно описать окружность.

10.5. В государстве некоторые города связаны дорогами, причём какие-то три города связаны дорогами каждый с каждым. На всех дорогах ввели одностороннее движение, но так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что в этом государстве найдётся замкнутый маршрут, состоящий из нечётного числа дорог.

РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
II (муниципальный) этап, 2014 год, 11 класс

11.1. В школе провели единую контрольную работу по математике среди всех одиннадцатиклассников. В результате 5/8 учащихся получили пятёрки, 11/20 от числа отличников – четвёрки, а остальные трое одиннадцатиклассников не пришли на контрольную по болезни. Сколько одиннадцатиклассников учится в школе.

11.2. Про углы треугольника ABC известно, что $\sin A+\cos B=\sqrt{2}$ и $\cos A+\sin B=\sqrt{2}$. Найдите величину угла C.

11.3. Решите уравнение $20[x]-14\{x\}=2014$ ($[x]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}$ – дробная часть числа x: $\{x\}=x-[x]$).

11.4. В четырехугольной пирамиде площади боковых граней равны между собой. Плоскость, пересекающая боковые рёбра, отсекает меньшую пирамиду, у которой площади боковых граней также равны между собой. Докажите, что основания этих пирамид – параллельны.

11.5. На вечеринке собралось 16 человек. Фотограф сделал несколько фотографий так, что каждая пара человек появилась ровно на одной фотографии вместе. На каждой фотографии сфотографированы либо трое, либо двое из присутствующих. Докажите, что всего сделано не менее 46 фотографий.

Рекомендации по проверке работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах. Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

Порядок начисления баллов:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения или решение отсутствует.

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за слишком длинное решение, или за решение школьника, отличающегося от приведенного в методических разработках. Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Жюри рассматривает записи решений, приведенные в чистовике. Черновик рассматривается только в случае ошибочного переноса записей из черновика в чистовик;

каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.

Недопустимо «парадное» переписывание работ для проверки. Краевое жюри рассматривает оригиналы ученических работ.

Решения задач и критерии оценивания

7.1. Две черепахи ползут наперегонки. Первая проползает 4 метра за каждые 9 часов, а вторая – 5 метров за каждые 11 часов. Какая черепаха ползет быстрее?

Ответ. Вторая.

За 99 часов первая черепаха проползает 44 метра, а вторая 45.

7.2. Придя в тир, Петя купил 5 пуль. За каждый успешный выстрел ему дают еще 5 пуль. Петя утверждает, что он сделал 50 выстрелов и 8 раз попал в цель, а его друг Вася говорит, что этого не может быть. Кто из мальчиков прав?

Ответ: прав Вася.

Если Петя купил вначале 5 пуль, а всего сделал 50 выстрелов, то 45 пуль он получил за успешные выстрелы. Но для этого ему надо было попасть в цель 9 раз. А он утверждает, что сделал только 8 метких выстрелов. Значит, он не прав.

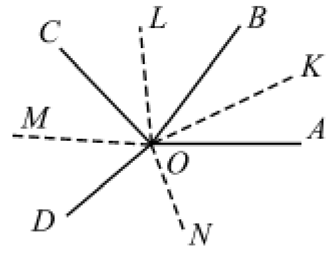
7.3.. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что если к числу прибавить 9, то число станет делиться на 9, а его цифры поменяются местами и получится новое двузначное число. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок (обязательно обоснуйте, что других вариантов нет).

Ответ: 45.

Обе цифры шифра – ненулевые. Во-первых, потому, что двузначное число должно иметь ненулевую цифру десятков. Во-вторых, поскольку цифры поменяются местами, и получится новое двузначное число, то на месте единиц числа не может стоять цифра 0. При прибавлении 9 ненулевая цифра единиц уменьшится на 1 и станет цифрой десятков первого числа. Это означает, что цифры десятков и единиц отличаются на 1. Само число должно делиться на 9, так как, прибавив к нему число, получаем число делящееся на 9. Значит, сумма цифр числа должна делиться на 9, а точнее должна быть равна 9, так как число 99 не подходит. Такими цифрами являются 4 и 5. Проверка $45 + 9 = 54$.

Замечание. Только ответ без проверки – 1 балл; ответ с проверкой без обоснования единственности до 3 баллов. Решение может быть основано на переборе вариантов. Если при этом пропущен какой-либо вариант, то не более 3 баллов.

7.4. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые также являются углами). Докажите, что два из этих углов образуют в сумме 180 градусов, и два других тоже.



Пусть лучи выходят из точки *O*. Обозначим их по кругу *OA*, *OB*, *OC* и *OD*. Лучи *OK*, *OL*, *OM*, *ON* – биссектрисы углов *AOB*, *BOC*. *COD*, *DOA*, соответственно. Тогда сумма углов *AOB*, *BOC*. *COD*, *DOA* равна 360 градусов, а сумма углов *KOL* и *MON* равна половине этой суммы, как и сумма углов *LOM* и *NOK*.

7.5. Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то из них они тут же съели вместе, 45% оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

Ответ: 11 конфет.

Поскольку 45% составляют 9/20 от количества конфет, которые остались перед обедом Карлсона, это число кратно 20. Обозначим его $20 \cdot n$. По условию $20 \cdot n \leq 111$, значит, $n \leq 5$. После обеда осталось $20 \cdot n - (20 \cdot n) \cdot \frac{9}{20} = 11 \cdot n$ конфет. Фрекен Бок нашла треть этого количества, то есть $11 \cdot n$ делится на 3. Значит, n делится на 3, $n = 3$, а фрекен Бок нашла 11 конфет.

8.1. У Карлсона есть варенье в семи банках вместимостью 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 литров. Он решил расставить своё варение на четыре полки так, чтобы на каждой полке было одинаковое количество литров. Помогите Карлсону.

Пример распределения: первая полка банки по 3 и 4 литра, вторая – 2 и 5 литров, третья – 1 и 6 литров, четвёртая – 7 литров.

Замечание. 7 баллов за пример.

8.2. Цена билета на стадион была 25 рублей. После снижения цен на билеты, число зрителей на стадионе увеличилось на 50 %, а выручка с проданных билетов увеличилась на 14 %. Сколько стал стоить билет на стадион после снижения цен?

Ответ: 19 руб.

Обозначим: a – количество зрителей, приходивших на стадион; x – доля новой цены билета, относительно цены в 25 рублей. Новая выручка составила: с одной стороны $(25 \cdot x) \cdot a \cdot 1{,}5$, с другой стороны $25 \cdot 1{,}14 \cdot a$. Из равенства $(25 \cdot x) \cdot a \cdot 1{,}5 = 25 \cdot 1{,}14 \cdot a$ получим $x = 0{,}76$ и $25 \cdot 0{,}76 = 19$.

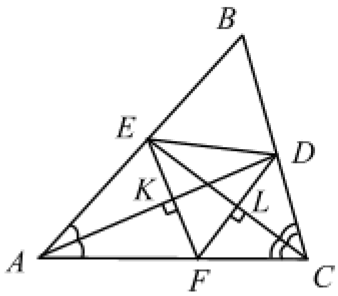
8.3. К числу 2014 приписали по цифре слева и справа. Полученное таким образом шестизначное число стало делиться на 36. Найдите все такие шестизначные числа.

Ответ: 220140, 720144, 320148.

Число делится на 36, если и только если оно делится на 4 и на 9. По признаку делимости на 4 справа надо приписать такую цифру a, чтобы двузначное число $4a$ делилось на 4. Возможны три варианта: 0, 4 и 8. По признаку делимости на 9 слева надо приписать такую цифру b, чтобы сумма цифр числа $b2014a$ делилась на 9. Варианты a = 0, 4 и 8 приводят однозначно к b = 2, 7 и 3.

Замечание. Только ответ с проверкой, но без объяснений об отсутствии других чисел, до 2 баллов.

8.4. В треугольнике *ABC* провели биссектрисы *AD* и *CE*. Оказалось, что $AE + CD = AC$. Найдите угол *B*.



Ответ: угол *B* равен 60°.

Обозначим α и γ – величины углов *A* и *C* треугольника *ABC*. На стороне *AC* отложим отрезок *AF*, равный *AE*. Из условия получим равенство отрезков *CD* и *CF*. Пусть биссектрисы *AD* и *CE* пересекают отрезки *EF* и *FD* в точках *K* и *L*. В равнобедренном треугольнике *FAE* отрезок *AK* является биссектрисой, значит, медианой и высотой, как и отрезок *CL* в *FCD*. В треугольнике *EFD* отрезки *EL* и *DK* являются медианами и высотами, значит, он равносторонний. Далее, $\angle AFE = 90^\circ - \alpha/2$, $\angle EFD = 60^\circ$, а $\angle DFC = 90^\circ - \gamma/2$. Сложив эти углы и приравняв к 180°, получим $\alpha + \gamma = 120^\circ$. Значит, угол *B* равен 60°.

8.5. На доске написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Одно число изменили на 1, потом одно из написанных изменили на 2, затем – на 3, и так далее до изменения на 10. Можно ли таким образом получить другие десять подряд идущих натуральных чисел?

Ответ: нет, нельзя.

Среди написанных чисел на доске имеется пять нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9 – их количество нечетное. При изменении числа на четное число четность исходного числа не меняется, а при изменении числа на нечетное – четность меняется. После пяти изменений на нечетные числа общее количество нечетных чисел будет четным. Однако среди десяти подряд идущих натуральных чисел имеется ровно пять нечетных чисел.

Замечание. Правильный ответ с объяснениями на примерах – до 2 баллов.

9.1. Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок заплакал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая – у Пятачка?

Ответ: Винни-Пух и Пятачок первоначально имели 6/7 и 1/7 доли торта соответственно.

Обозначим a и b доли торта Винни-Пуха и Пятачка, соответственно. Тогда $a + b = 1$. Из условия $a/3 + b = 3b$, значит, $a = 6b$, $7b = 1$, $b = 1/7$ и $a = 6/7$.

9.2. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}\ge\frac{(a+c)^2}{b+d}$.

Поскольку числа a, b, c, d положительные, данное неравенство равносильно неравенству $(b+d)\left(da^2+bc^2\right)\ge db(a+c)^2$. После преобразований приходим к неравенству $(bc-da)^2\ge 0$, которое является верным.

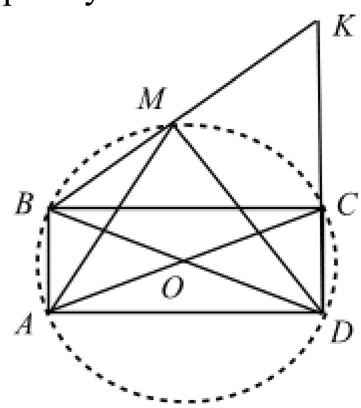
9.3. Найдите какие-нибудь пять последовательных натуральных чисел, меньших 100, произведение которых делится на 2014.

Ответ. 53, 54, 55, 56, 57.

Этот пример можно получить, заметив, что $2014=2\cdot 19\cdot 53$.

Замечание. Пример таких чисел – единственный. Только ответ без проверки и без объяснений – 5 балла; ответ с проверкой или с объяснениями – 7 баллов.

9.4. Дан прямоугольник $ABCD$. На луче DC отложен отрезок DK, равный DB. M – середина отрезка BK. Докажите что AM – биссектриса угла BAC.



Первое решение. Треугольник BDK равнобедренный по построению, значит, его медиана DM является его высотой и биссектрисой. Рассмотрим окружность, построенную на BD, как на диаметре. Точки M, C и A лежат на этой окружности, поскольку углы BMD, BCD и BAD – прямые. Углы BAM и BDM, равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Точно также равны углы MAC и MDC. Далее, углы BDM и MDC равны, поскольку DM является биссектрисой. Отсюда следует, что углы BDM и MDC равны, а AM – биссектриса угла BAC.

Второе решение. Как в первом решении замечаем, что DM является биссектрисой угла BDC. Это означает, что точка M равноудалена от сторон этого угла. Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, значит отрезок OM – средняя линия в треугольнике DBK. Значит, MO параллелен DK и перпендикулярен BC. Отсюда следует, что MO серединный перпендикуляр к BC, точка M равноудалена от сторон угла BOC и равноудалена от прямых AB и CD. Таким образом, M равноудалена от AB и AC, значит, лежит на биссектрисе угла BAC.

9.5. В уравнении $*x^2+*x+*=0$ двое по очереди вместо любой звёздочки ставят произвольное число (при x^2 нуль ставить нельзя). Первый выигрывает, если полученное уравнение не имеет корней, а второй – в противном случае. Может ли кто-нибудь из них выиграть, независимо от игры партнёра?

Ответ: второй игрок выигрывает независимо от игры первого игрока.

Если первый игрок не поставит число c, отличное от нуля, на место свободного члена, то второй игрок на это место поставит число 0, и не зависимо от дальнейшей игры, итоговое уравнение будет иметь корень $x = 0$. Пусть своим ходом первый игрок поставил число c, отличное от нуля, на место свободного члена. Тогда перед x^2 второй игрок поставит число $-c$. Рассмотрим дискриминант $D=b^2-4ac=b^2+4c^2>0$ не зависимо от последнего хода первого игрока.

10.1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

Ответ: да, может.

Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32°$. Если $T_F = T_C$, то $0{,}8T_C + 32 = 0$, то есть, $T_C = -40$.

Замечания. Только ответ без объяснений – 0 балла; ответ с объяснениями (корень уравнения можно и не находить – достаточно заметить, что графики линейных функций с неравными угловыми коэффициентами пересекаются) – 7 баллов.

10.2. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда 3×4×5 разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клеточном кольце ширины 1, опоясывающем параллелепипед, была равна 120?

Ответ: да, можно.

Пример. Во все квадратики (двух) граней 3×4 запишем число 5, во все квадратики (двух) граней 3×5 запишем число 8, во все квадратики (двух) граней 4×5 запишем число 9.

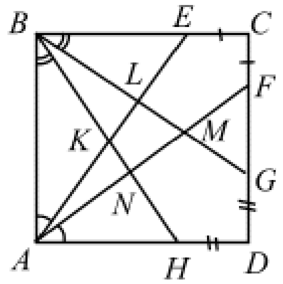
Проверка: сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 3 равна (4×5+5×8)×2=120, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 4 равна (3×5+5×9)×2=120, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 5 равна (3×8+4×9)×2=120.

Замечание. Приведенный пример – не единственный. Ответ без примера 0 баллов, ответ с правильным примером, но без проверки – 5 баллов. Составлена система уравнений (из которой следует правильный пример), но не решена, 3 балла.

10.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x)=x-1$ и $f(x)=2-2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вид ax^2+bx+c. Тогда уравнения имеют вид $ax^2+(b-1)x+(c+1)=0$ и $ax^2+(b+2)x+(c-2)=0$. Поскольку оба уравнения имеют по одному корню, их дискриминанты равны нулю. Таким образом, $(b-1)^2-4a(c+1)=0$ и $(b+2)^2-4a(c-2)=0$. Умножив первое уравнение на 2, сложив со вторым и поделив результат на 3, получим $b^2-4ac=-2$. Значит, трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

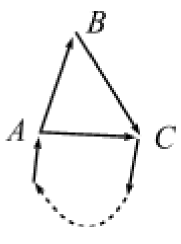
10.4. В квадрате *ABCD* на стороне *BC* взята точка *E*, на стороне *CD* – точки *F* и *G* (точка *F* между *C* и *G*), на стороне *AD* – точка *H*. При этом *CE* = *CF*, *DG* = *DH*. Докажите, что вокруг четырехугольника, образованного пересечением углов *HBG* и *EAF*, можно описать окружность.

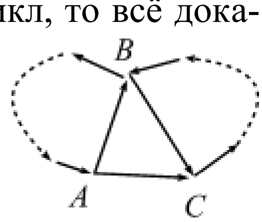


Обозначим вершины четырехугольника, образованного пересечением углов *HBG* и *EAF*, через *K*, *L*, *M*, *N* как показано на рисунке. Прямоугольные треугольники *ABE* и *ADF*, *BAH* и *BCG* попарно равны по двум катетам. Углы в первой паре треугольников при вершине *A* обозначим α; углы во второй паре при вершине *B* – β. Тогда угол при вершине *K* треугольника *AKB* равен $180^\circ-(\alpha+\beta)$. Он же является углом при вершине *K* четырехугольника *KLMN*. Угол *M* треугольника *FMG* равен $180^\circ-(90^\circ-\alpha)-(90^\circ-\beta)=\alpha+\beta$ и является углом при вершине *M* четырехугольника *KLMN*. Таким образом сумма противоположных углов четырехугольника *KLMN* равна 180 градусов и вокруг четырехугольника можно описать окружность.

10.5. В государстве некоторые города связаны дорогами, причём какие-то три города связаны дорогами каждый с каждым. На всех дорогах ввели одностороннее движение, но так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что в этом государстве найдётся замкнутый маршрут, состоящий из нечётного числа дорог.

Рассмотрим три дороги, связывающие три города, о которых говорится в условии. Если после их ориентации образовался цикл, то всё доказано. Если же это не так, то из какого-то города *A* выходят дороги в два других (*B* и *C*). Между *B* и *C* тоже есть дорога, которая после ориентации стала, например, *B*→*C*. Таким образом, из *A* в *C* есть два пути: длины 1 (*A*→*C*) и длины 2 (*A*→*B*→*C*). По условию, из *C* в *A* есть путь. Случай 1 (рисунок слева). Этот путь не проходит через *B*. Тогда этот





путь вместе с одним из двух указанных выше путей образуют цикл как чётной, так и нечётной длины. Случай 2 (рисунок справа). Этот путь проходит через B. Если участок пути от C до B (или от B до A) четный, то вместе с $B\to C$ (соотв. с $A\to B$) получим нечетный цикл. Если оба участка нечетные, то в целом путь четный. Добавим к нему $A\to C$ и получим нечетный цикл.

Замечание. Пропущен один из случаев – оценка не выше 3 баллов.

11.1. В школе провели единую контрольную работу по математике среди всех одиннадцатиклассников. В результате 5/8 учащихся получили пятёрки, 11/20 от числа отличников – четвёрки, а остальные трое одиннадцатиклассников не пришли на контрольную по болезни. Сколько одиннадцатиклассников учится в школе.

Ответ: 96.

Доля учеников, получивших четверки 55/160. Доля учеников, получивших пятерки и четверки 5/8 + 55/160 = 155/160. Таким образом, доля пропустивших экзамен равна 5/160 = 1/32. Обозначим N – количество одиннадцатиклассников, тогда из условия $N/32 = 3$ и $N = 96$.

11.2. Про углы треугольника ABC известно, что $\sin A+\cos B=\sqrt{2}$ и $\cos A+\sin B=\sqrt{2}$. Найдите величину угла C.

Ответ: 90°.

Первый способ. Возведем оба равенства в квадрат и сложим. После преобразований получим $\sin\left(A+B\right)=1$, то есть $A + B = 90°$.

Второй способ. Сложив исходные равенства, получим $\sin\left(A+45^\circ\right)+\sin\left(B+45^\circ\right)=2$, откуда $\sin\left(A+45^\circ\right)=\sin\left(B+45^\circ\right)=1$. Следовательно, $A = B = 45°$. Значит, $C = 90°$.

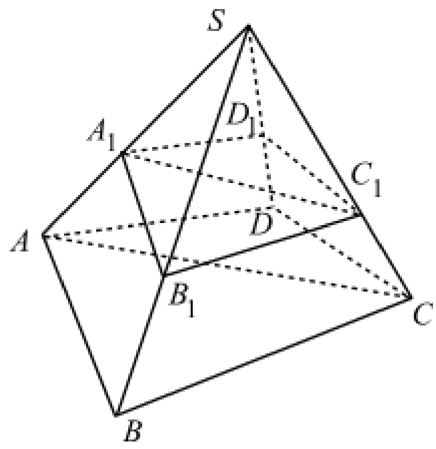
11.3. Решите уравнение $20\left[x\right]-14\left\{x\right\}=2014$ ($[x]$ – целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}$ – дробная часть числа x: $\{x\}=x-[x]$).

Ответ: $x=101\frac{3}{7}$.

Из неравенства $0\le\{x\}<1$ следует $0\le 14\{x\}<14$, $0\le 20\left[x\right]-2014<14$. Прибавим 2014, поделим на 20 и получим $\frac{2014}{20}\le\left[x\right]<\frac{2028}{20}$ или $100{,}7\le\left[x\right]<101{,}4$. Таким образом, $\left[x\right]=101$, $\{x\}=\frac{20\cdot 101-2014}{14}=\frac{3}{7}$ и $x=101+\frac{3}{7}$.

Второе решение. Из условия следует, что число $14\left\{x\right\}$ должно быть целым, значит, это одно из чисел 0, 1, 2, …, 13. При этом его сумма с 2014 должна делиться на 20. Значит, $14\left\{x\right\}=6$, $\left[x\right]=\frac{2014+6}{20}=101$.

11.4. В четырехугольной пирамиде площади боковых граней равны между собой. Плоскость, пересекающая боковые рёбра, отсекает меньшую пирамиду, у которой площади боковых граней также равны между собой. Докажите, что основания этих пирамид – параллельны.



Пусть *SABCD* данная пирамида, $A_1B_1C_1D_1$ сечение пирамиды плоскостью. Поскольку площади треугольников *ASB, BSC* равны получим $\frac{AS\cdot SB\cdot\sin\angle ASB}{2}=\frac{BS\cdot SC\cdot\sin\angle BSC}{2}$ значит $\frac{AS}{SC}=\frac{\sin\angle BSC}{\sin\angle ASB}$. Точно также из равенства площадей треугольников A_1SB_1, B_1SC_1 получим $\frac{A_1S}{SC_1}=\frac{\sin\angle BSC}{\sin\angle ASB}$. Отсюда следует, что $\frac{AS}{SC}=\frac{A_1S}{SC_1}$, а поскольку у треугольников *ASC* и A_1SC_1 угол *S* общий – треугольники подобны, а их стороны *AC* и A_1C_1 параллельны. Аналогично доказывается параллельность *BD* и B_1D_1. Поскольку в основаниях пирамид диагонали попарно параллельны, получаем параллельность оснований.

11.5. На вечеринке собралось 16 человек. Фотограф сделал несколько фотографий так, что каждая пара человек появилась ровно на одной фотографии вместе. На каждой фотографии сфотографированы либо трое, либо двое из присутствующих. Докажите, что всего сделано не менее 46 фотографий.

Всего есть 120 пар. Если есть *k* тройных фотографий, то двойных 120–3*k*, итого фотографий 120–2*k*. Человек *A* участвует в 15 парах. На его тройных фотографиях представлены две такие пары, поэтому тройных фотографий с участием *A* – не более 7, а всего тройных фотографий – не более $\frac{7\cdot16}{3}=37\frac{1}{3}$, т.е. $k\le37$. Отсюда общее число фотографий 120–2*k* ≥ 46.